MATEMATIKA+

MXMVD18C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

- **Didaktický test** obsahuje **23 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–12) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 13–23) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.

1

- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.

	A	B	C	D	E
17	☐	☐	☒	☐	☐

- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.

	A	B	C	D	E
17	☒	☐	■	☐	☐

- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

1 bod

1 **Pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ upravte:**

$$\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{-2}}{\left(\frac{2}{a}\right)^{-1}} - \frac{a}{2} =$$

---

1 bod

2 **Výraz s proměnnou $x \in \mathbf{R}$ rozložte na součin dvojčlenů.**

$(2x - 1)^2 - x^2 =$

---

1 bod

3 Množina M obsahuje všechna taková přirozená čísla n, že druhá i třetí odmocnina součinu $n \cdot 3^{1\,220}$ je rovněž přirozeným číslem.

Určete nejmenší nenulové číslo n množiny M.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

Adam, Bořek a Cyril si koupili ze společných příspěvků doplňky k hudební aparatuře.

Cyril s Bořkem přispěli dohromady částkou 5 100 korun. Bořek přispěl o třetinu vyšší částkou než Adam a Adam částkou o třetinu nižší než Cyril.

Po zakoupení všech doplňků chlapci věnovali zbývající částku na dobročinné účely. Její hodnota se rovnala pětině částky, kterou zaplatili za všechny doplňky.

(CZVV)

max. 3 body

4 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic **vypočtěte v korunách**

4.1 příspěvek Adama,

4.2 částku věnovanou na dobročinné účely.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy 4 celý **postup řešení**.

---

1 bod

5 **V oboru R řešte:**

$$\sqrt{5+x}\cdot\sqrt{x+4}=0$$

max. 2 body

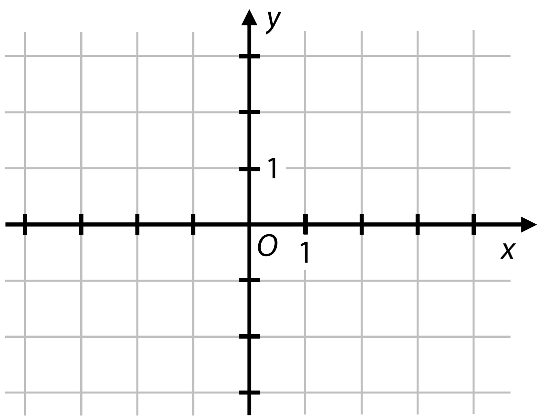
6 V oboru R řešte:

$$\frac{x(x-3)}{x^3+9x} < 0$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Je dána rovnost:

$$\log(y+1) = 2\log(x+1) - \log\frac{x+1}{2}$$



(CZVV)

max. 2 body

7

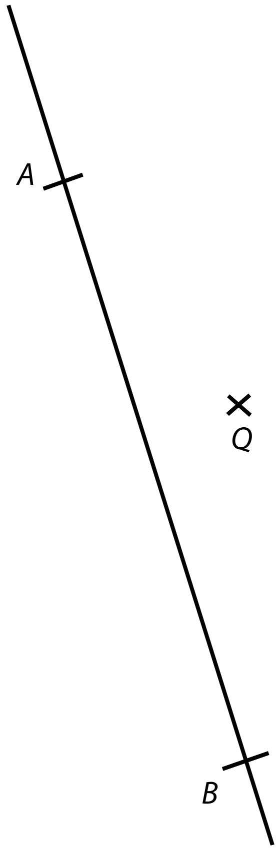
7.1 Z rovnosti vyjádřete v co nejjednodušším tvaru proměnnou y tak, aby zápis neobsahoval logaritmy.

7.2 Znázorněte graficky množinu všech bodů $X[x;\ y]$, jejichž souřadnice vyhovují dané rovnosti. Nezapomeňte zohlednit podmínky.

V záznamovém archu obtáhněte graf **propisovací tužkou**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V rovině leží přímka *AB* a mimo ni bod *Q*.



(CZVV)

max. 3 body

8 Úsečka *AB* je přepona pravoúhlého trojúhelníku *ABC*, bod *Q* leží na ose úhlu *ACB*.

8.1 Proveďte náčrtek trojúhelníku *ABC* a zapište rozbor nebo postup konstrukce chybějícího vrcholu *C*.

8.2 V obrázku sestrojte chybějící vrchol *C* trojúhelníku *ABC* a trojúhelník narýsujte. Najděte všechna řešení.

V záznamovém archu obtáhněte všechny čáry a křivky **propisovací tužkou**.

1 bod

9 **Vypočtěte:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n + 4^{n+1}}{2 \cdot 4^n} =$$

V záznamovém archu uveďte **postup řešení**.

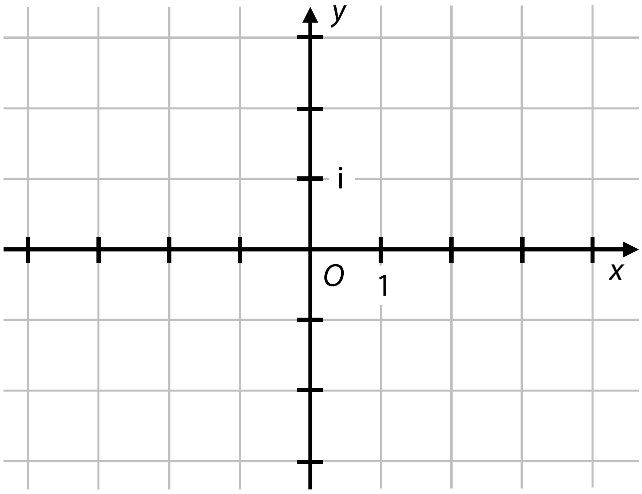
---

max. 2 body

10 **V oboru C řešte rovnici:**

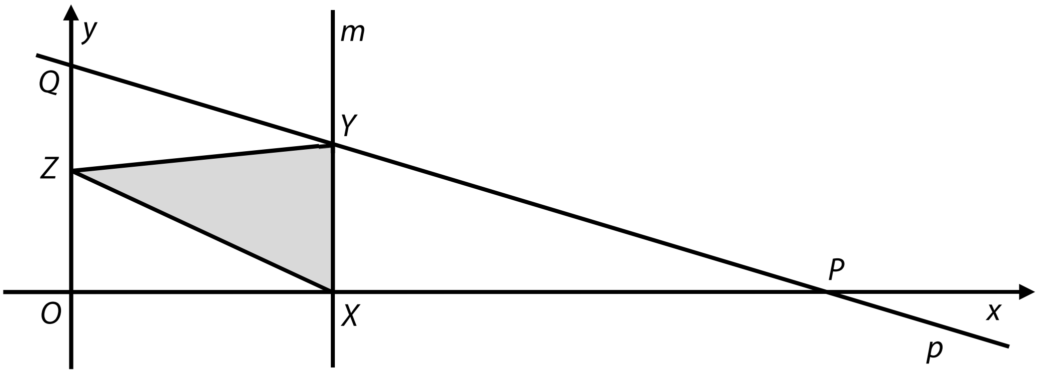
$z^4 = (2\mathrm{i})^2$

Všechna řešení uveďte v algebraickém tvaru.



VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

Trojúhelník OPQ je ohraničen souřadnicovými osami x, y a přímkou p: $x + 4y - 12 = 0$. Přímka m rovnoběžná se souřadnicovou osou y protíná strany OP a PQ trojúhelníku OPQ v bodech $X[x;\ 0]$ a $Y[x;\ y]$, které jsou vrcholy menšího trojúhelníku XYZ. Vrchol Z leží na souřadnicové ose y.



(CZVV)

max. 4 body

11

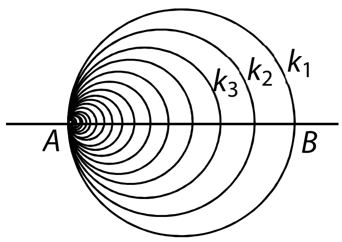
11.1 Vyjádřete obsah trojúhelníku XYZ v závislosti na x-ové souřadnici bodu X.

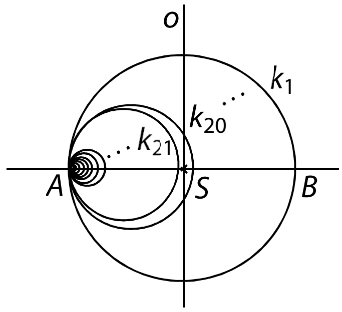
11.2 Určete největší možný obsah trojúhelníku XYZ.

11.3 Vypočtěte souřadnice vrcholu Y za předpokladu, že obsah trojúhelníku XYZ je 4 (j^2). Uveďte všechna řešení.

V záznamovém archu uveďte ve všech částech úlohy 11 celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ OBRÁZEK A TEXT K ÚLOZE 12





Nad průměrem AB je sestrojena kružnice k_1 s poloměrem r.

Kružnice k_1 se zobrazí na kružnici k_2 ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\varkappa \in (0; 1)$. V téže stejnolehlosti se zobrazí kružnice k_2 na kružnici k_3, kružnice k_3 na kružnici k_4, …, tedy pro každé $n \in \mathbf{N}$ se zobrazí kružnice k_n na kružnici k_{n+1}.

(CZVV)

max. 4 body

12

12.1 Pro $\varkappa = \frac{7}{8}$ a $r = 4$ cm vypočtěte v cm součet délek o_n všech těchto kružnic k_n, tj.

$$o_1 + o_2 + o_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} o_n \,.$$

12.2 Určete interval, v němž se může nacházet koeficient $\varkappa$, jestliže osa o úsečky AB protíná každou z kružnic k_1 až k_{20} ve dvou bodech, ale s kružnicí k_{21} již nemá žádný společný bod.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy 12 celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

> V balíčku zbylo 6 karet, po dvou od každé ze tří barev.
> Karty se po dvou náhodně rozdělí mezi tři hráče A, B, C.
>
> *(CZVV)*

max. 3 body

13 Ke každému jevu (13.1–13.3) přiřaďte pravděpodobnost (A–F), s níž může nastat.

13.1 Hráč A získá dvě karty téže barvy. ______

13.2 Hráč A získá dvě karty téže barvy a každý ze zbývajících dvou hráčů B, C bude mít dvě karty různých barev. ______

13.3 Alespoň jeden z hráčů A, B, C získá dvě karty téže barvy. ______

A) $\frac{3}{5}$

B) $\frac{7}{15}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{2}{15}$

F) jiná než výše uvedené

max. 3 body

14 **Pro $x \in \mathbf{R}$ přiřaďte každému výrazu (14.1–14.3) ekvivalentní vyjádření (A–F).**

14.1 $\cos^2(-x) + \sin^2(-x)$ ______

14.2 $[\cos(-x) + \sin(-x)]^2$ ______

14.3 $1 - \cos 2x$ ______

A) $2\sin^2 x$

B) $2\cos^2 x$

C) $1 - \sin 2x$

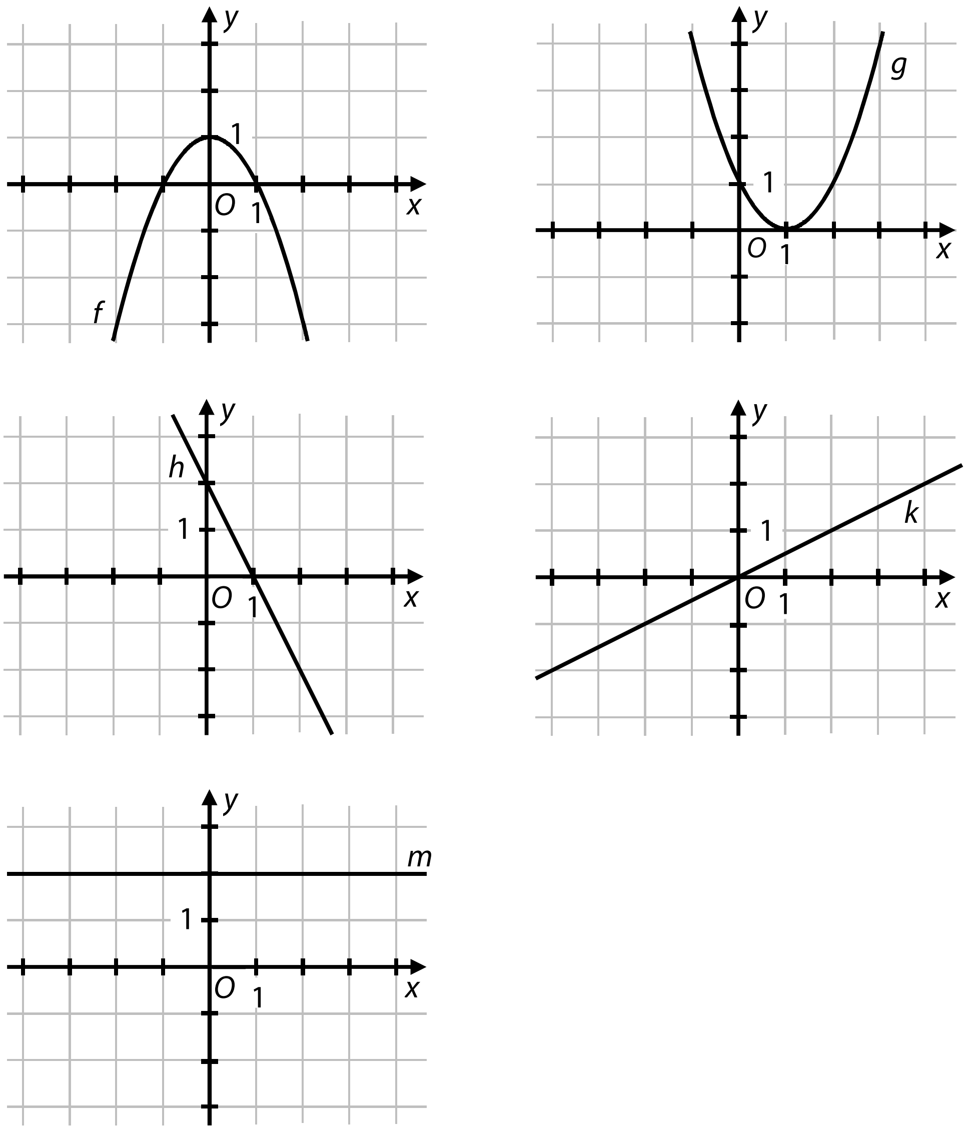
D) -1

E) $1 + \sin 2x$

F) 1

VÝCHOZÍ TEXT A GRAFY K ÚLOZE 15

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* jsou sestrojeny grafy kvadratických funkcí *f*, *g* a grafy lineárních funkcí *h*, *k*, *m*. Funkce jsou definovány pro všechna $x \in \mathbf{R}$.



(CZVV)

2 body

15 Který z následujících vztahů <u>není pravdivý</u>?

A) Pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí: $f(x) + g(x) = h(x)$

B) Pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí: $h(x) + 4 \cdot k(x) = m(x)$

C) Pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí: $x \cdot m(x) = 2 - h(x)$

D) Pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí: $g(x) = -f(x) - 1$

E) Pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí: $k(x) = \dfrac{1}{m(x)} \cdot x$

2 body

16 Platí: $a, b \in (0; +\infty)$, $a \neq b$.

Které tvrzení je pravdivé?

A) Součin ab musí být vždy větším číslem, než je hodnota každého z činitelů a, b.

B) Rozdíl $a - b$ musí být vždy kladný.

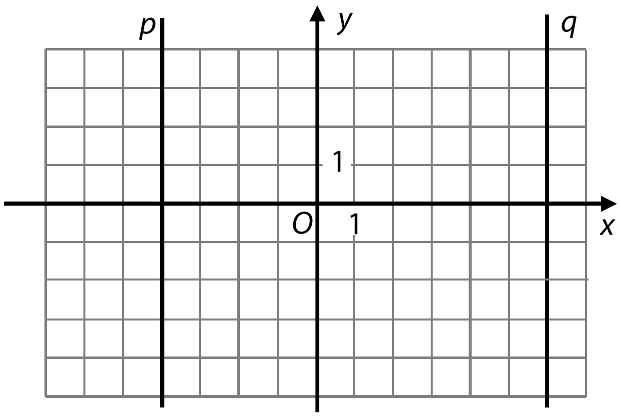
C) Hodnota výrazu $\dfrac{ab - a^2}{a - b}$ musí být vždy záporná.

D) Hodnota výrazu a^{-1} nemusí být vždy kladná.

E) Hodnota výrazu $\left[-(-b)^3\right]$ musí být vždy záporná.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

Pro elipsu platí:
– střed elipsy leží na souřadnicové ose x;
– přímky p, q se dotýkají elipsy v jejích hlavních vrcholech;
– délka hlavní poloosy je dva a půl násobkem délky vedlejší poloosy.



Přímky p, q jsou rovnoběžné se souřadnicovou osou y a procházejí mřížovými body.

(CZVV)

2 body

17 **Která z uvedených rovnic je rovnicí dané elipsy?**

A) $4x^2 + 25y^2 - 8x - 96 = 0$

B) $4x^2 + 25y^2 + 8x - 96 = 0$

C) $4x^2 + 25y^2 - 50y - 75 = 0$

D) $4x^2 + 25y^2 + 50y - 75 = 0$

E) žádná z uvedených rovnic

2 body

18 Přímka q prochází body $A[-5; 7]$ a $B[1; -1]$.
Přímka p je obrazem přímky q v posunutí určeném vektorem $\vec{u} = (-3;\ 4)$.

Jaká je vzdálenost přímek p, q?

A) 10

B) menší než 10 a větší než 5

C) 5

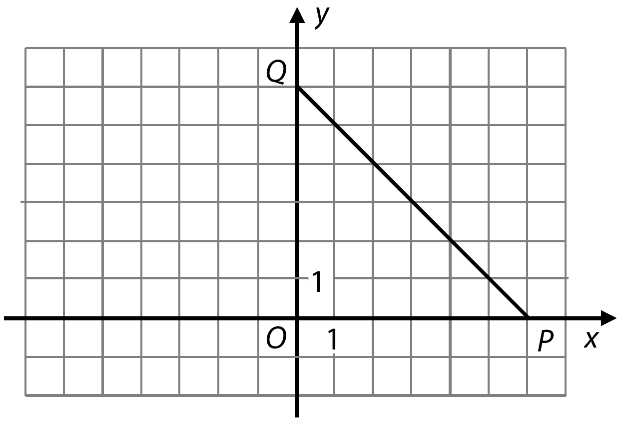
D) nenulová vzdálenost menší než 5

E) 0

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Trojúhelník *OPQ* s těžištěm *T* má všechny vrcholy v mřížových bodech.

Bod *S* je střed kružnice opsané trojúhelníku *OPQ*.



(CZVV)

2 body

19 **Jaká je vzdálenost bodů *S* a *T*?**

A) 1

B) $\sqrt{2}$

C) 1,5

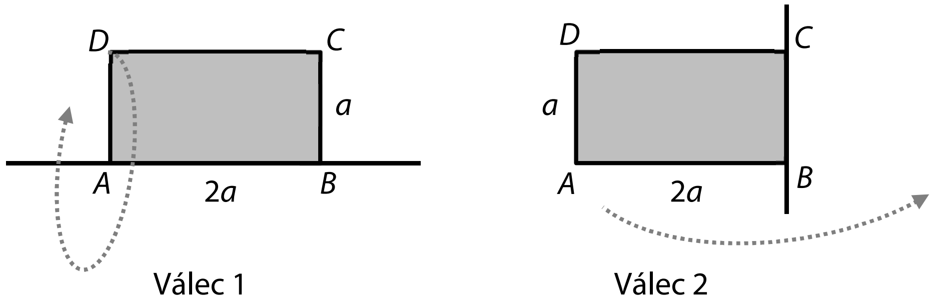
D) $\sqrt{3}$

E) jiná vzdálenost

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

Rotací obdélníku *ABCD* kolem přímky *AB* vznikne válec o objemu V_1 a rotací obdélníku *ABCD* kolem přímky *BC* válec o objemu V_2.

Platí: $|AB| = 2a$, $|BC| = a$.



(CZVV)

2 body

20 Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A) Objem V_1 je dvojnásobkem objemu V_2.

B) Objem V_1 je stejný jako objem V_2.

C) Objem V_1 je polovinou objemu V_2.

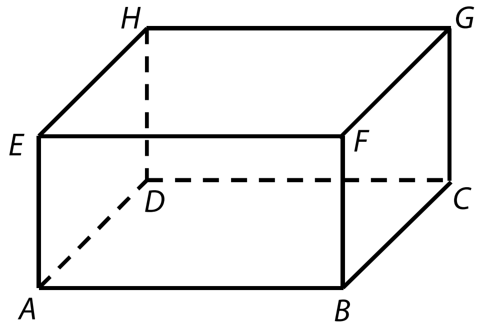
D) Objem V_1 je čtvrtinou objemu V_2.

E) Žádné z výše uvedených tvrzení není pravdivé.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

V kvádru *ABCDEFGH* platí:

$|AB| = |AD| = 4$ cm, $|AE| = 2$ cm.



(CZVV)

2 body

21 Jaká je vzdálenost bodu *A* od přímky *FH*?

A) $2 \cdot \sqrt{3}$ cm

B) $3 \cdot \sqrt{2}$ cm

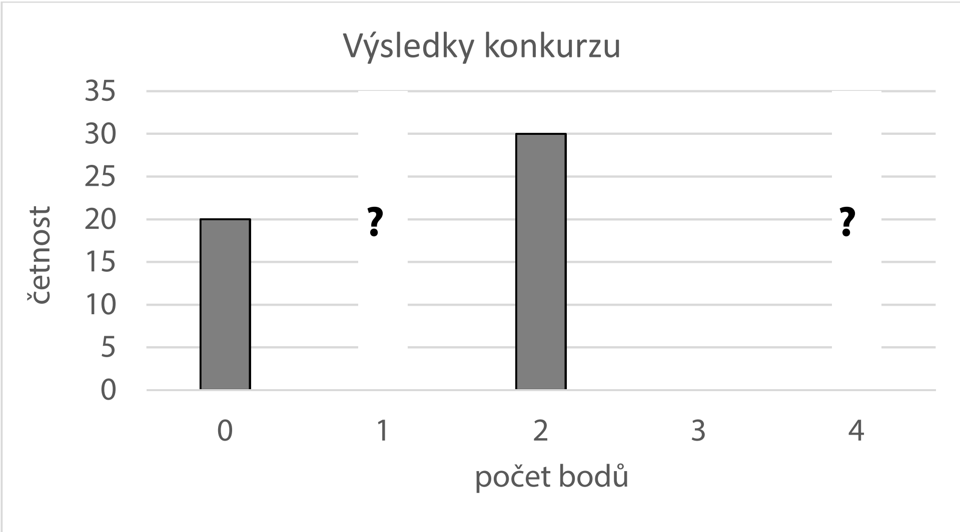
C) $2 \cdot \sqrt{5}$ cm

D) 3 cm

E) jiná vzdálenost

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 22

Účastníci konkurzu mohli získat 0, 1, 2, 3, nebo 4 body.
Nakonec žádná ze zúčastněných osob nezískala 3 body a medián i aritmetický průměr počtu získaných bodů byl shodně 1,5.



(CZVV)

2 body

22 Kolik osob se účastnilo konkurzu?

A) právě 70 osob

B) právě 80 osob

C) právě 90 osob

D) právě 100 osob

E) Úloha má více řešení.

max. 3 body

23 **Rozhodněte o každé z posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (23.1–23.3) daných vzorcem pro n–tý člen, zda je aritmetická (A), či nikoli (N).**

		A	N
23.1	$a_n = 2^n \cdot \log 2$	☐	☐
23.2	$a_n = 2 \cdot \log 2^n$	☐	☐
23.3	$a_n = 3n + \dfrac{5-n}{2}$	☐	☐

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.