

MATEMATIKA

MAMZD20C0T04

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

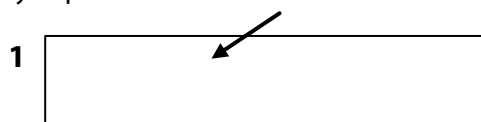
- **Didaktický test** obsahuje **26 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulačtor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulačtor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi píšete do záznamového archu.
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- První část didaktického testu (úlohy 1–15) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 16–26) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neodčítají záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

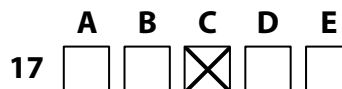
- Výsledky **píšete čitelně** do vyznačených bílých polí.



- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapíšte správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvete původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědi a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Ve třídě je 32 žáků, 13 z nich hraje na kytaru, 15 na flétnu a 10 žáků nehraje na žádný z těchto dvou nástrojů.

(CZVV)

1 bod

1 Vypočtete, kolik žáků třídy hraje na kytaru i na flétnu.

Řešení:

Alespoň na jeden z uvedených dvou nástrojů hraje 22 žáků ($32 - 10 = 22$).

Na kytaru i na flétnu hraje **6 žáků** ($13 + 15 - 22 = 6$).

1 bod

2 Pro $y \in (0; +\infty)$ zjednodušte:

$$\sqrt{\frac{y^{64}}{16} \cdot \left(\frac{2}{y^7}\right)^4} =$$

Řešení:

$$\sqrt{\frac{y^{64}}{16} \cdot \left(\frac{2}{y^7}\right)^4} = \frac{y^{32}}{4} \cdot \left(\frac{2}{y^7}\right)^2 = \frac{y^{32}}{4} \cdot \frac{4}{y^{14}} = y^{18}$$

1 bod

3 Určete všechny hodnoty $c \in \mathbb{R}$, pro které má smysl výraz:

$$\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{5-c}}$$

Řešení:

$$1 - c \geq 0 \wedge 5 - c > 0$$

$$c \leq 1 \wedge c < 5$$

$$c \in (-\infty; 1)$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

Paní Veselá si chtěla pořídit auto. Za nové by utratila 75 % svých úspor. Kdyby si pořídila rok staré auto, 43 % úspor by jí zbylo.

(CZVV)

1 bod

4 Vypočtete, o kolik procent je rok staré auto levnější než nové.

Řešení:

Hodnotu úspor paní Veselé označme u .

Cena nového auta $0,75u \dots 100 \%$

Cena rok starého auta $u - 0,43u = 0,57u \dots 76 \%$ $\left(\frac{0,57u}{0,75u} \cdot 100 \% = 76 \%\right)$

Rozdíl v cenách $0,18u \dots 24 \%$ $(100 \% - 76 \% = 24 \%)$

Rok staré auto je **o 24 %** levnější než nové.

max. 2 body

- 5 Pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 0\}$ zjednodušte
(výsledný výraz nesmí obsahovat závorky):

$$\frac{\frac{a+1}{\frac{a+1}{a}-1} : \frac{a}{a+1} - 1 =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a+1}{\frac{a+1}{a}-1} : \frac{a}{a+1} - 1 &= \frac{a+1}{\frac{a+1-a}{a}} \cdot \frac{a+1}{a} - 1 = \frac{(a+1)(a+1)}{\frac{1}{a} \cdot a} - 1 = \\ \frac{a^2+2a+1}{1} - 1 &= a^2+2a \end{aligned}$$

max. 2 body

- 6 V oboru \mathbf{R} řešte:

$$\frac{x-6}{x-3} = 2 - \frac{x}{x+3}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{x-6}{x-3} = 2 - \frac{x}{x+3} \quad | \cdot (x-3)(x+3), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; 3\} \\ (x-6)(x+3) = 2 \cdot (x-3)(x+3) - x \cdot (x-3) \\ x^2 - 6x + 3x - 18 = 2 \cdot (x^2 - 9) - x^2 + 3x \\ 2x^2 - 6x - 18 = 2x^2 - 18 \\ -6x = 0 \\ x = 0, \quad K = \{0\} \end{aligned}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Hodinová sazba trenéra badmintonu je o 250 korun vyšší než hodinový pronájem kurtu.
Cena za dvě hodiny pronájmu kurtu je o jednu devítinu nižší, než je hodinová sazba trenéra badmintonu.

(Hodinová sazba trenéra badmintonu nezahrnuje pronájem kurtu.)

(CZVV)

max. 2 body

7 Vypočtete v korunách hodinovou sazbu trenéra badmintonu.

Řešení:

Hodinovou sazbu trenéra badmintonu (v korunách) označme t ,
cenu za hodinu pronájmu kurtu (v korunách) označme k .

$$\begin{aligned}k &= t - 250 \\2k &= \frac{8}{9}t \\ \hline 2(t - 250) &= \frac{8}{9}t \\ \frac{10}{9}t &= 500 \\ t &= \mathbf{450}\end{aligned}$$

Hodinová sazba trenéra badmintonu je **450 korun**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

V lichoběžníku je délka jedné základny 4 cm. Výška lichoběžníku je stejná jako délka druhé základny a obsah lichoběžníku je 96 cm².

(CZVV)

max. 2 body

8 Vypočtete v cm výšku lichoběžníku.

Řešení:

Délky základen lichoběžníku (v cm) označme a , c a výšku v .
Obsah lichoběžníku (v cm²) označme S .

V lichoběžníku platí: $a = 4$, $c = v$, $S = 96$

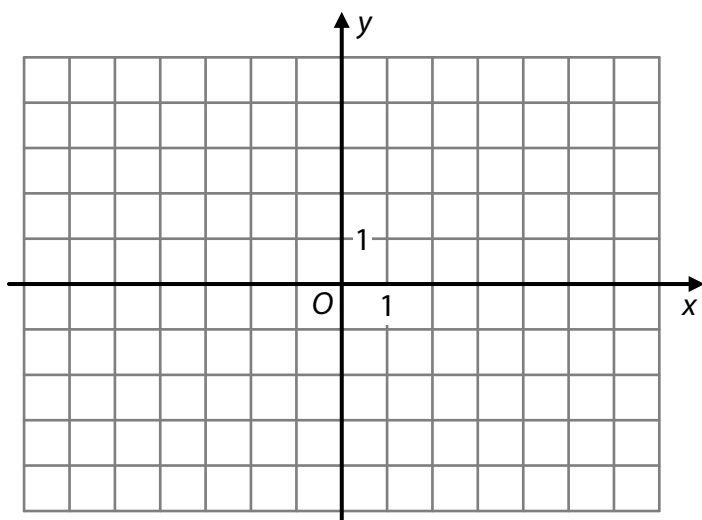
$$\begin{aligned}S &= \frac{(a + c) \cdot v}{2} \\96 &= \frac{(4 + v) \cdot v}{2} \\192 &= 4v + v^2 \\0 &= v^2 + 4v - 192 \\0 &= (v - 12)(v + 16) \\v &= \mathbf{12} \vee v = -16\end{aligned}$$

Výška lichoběžníku měří **12 cm**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Je dána přímka $p: y = 0,5x + 1$.

Přímka q je kolmá k přímce p a prochází bodem $Q[-2; 4]$.



(CZVV)

max. 2 body

9

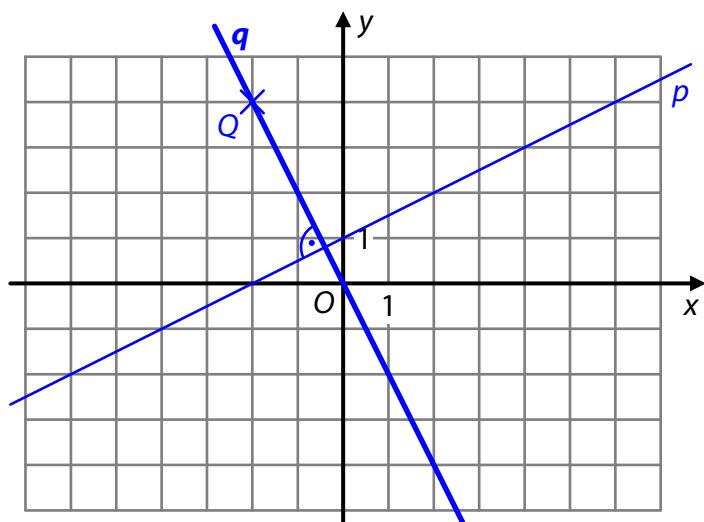
9.1 V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte přímku q .

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení:

V kartézské soustavě souřadnic zakreslíme přímku p a bod Q .

Bodem Q vedeme přímku q kolmou k přímce p .



případně

Sestavíme rovnici přímky q (např. směrnicový tvar) a zakreslíme ji do kartézské soustavy souřadnic.

Směrnice přímky p je $k_p = 0,5$.

Pro směrnici přímky q platí:

$$k_q = -\frac{1}{k_p} = -2$$

Směrnicový tvar rovnice přímky q :

$$q: y = -2x + q$$

$$Q \in q: 4 = -2 \cdot 2 + q, \quad q = 0$$

$$q: y = -2x$$

9.2 Vypočtete souřadnice průsečíku $M[m_1; m_2]$ přímk p, q .

Řešení:

Sestavíme rovnici přímky q (viz početní řešení úlohy 9.1): $q: y = -2x$

$M[m_1; m_2] \in p \cap q: m_2 = 0,5m_1 + 1$

$$\underline{m_2 = -2m_1}$$

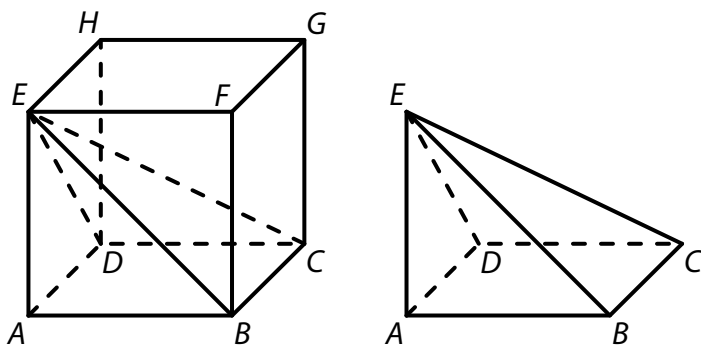
$$0 = 2,5m_1 + 1$$

$$m_1 = -\frac{2}{5}, \quad m_2 = \frac{4}{5}$$

$$M\left[-\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right]$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

V krychli $ABCDEFGH$ je umístěn čtyřboký jehlan $ABCDE$, který má objem 243 cm^3 .



(CZVV)

1 bod

10 Vypočtete v cm^2 obsah podstavy $ABCD$.

Řešení:

Délku hrany krychle označme a , obsah podstavy $ABCD$ označme S_p a objem jehlanu V .

Výška jehlanu je rovna délce a hrany krychle.

$$S_p = a^2, \quad V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot a = \frac{a^3}{3}$$

Objem krychle je tedy trojnásobkem objemu jehlanu.

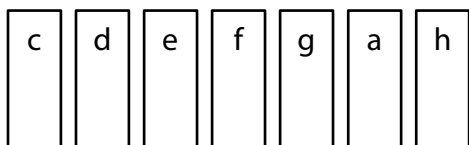
$$a^3 = 3V$$

$$a = \sqrt[3]{3V} = \sqrt[3]{3 \cdot 243 \text{ cm}^3} = 9 \text{ cm}$$

$$S_p = (9 \text{ cm})^2 = \mathbf{81 \text{ cm}^2}$$

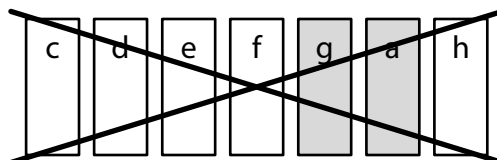
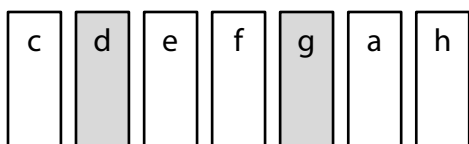
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

Hugo ponechal na dětském xylofonu 7 destiček s tóny c, d, e, f, g, a, h.



Do telefonu si pak nahrál všechny dvojzvuky vytvořené současným klepnutím dvěma prsty na dvě různé destičky, které spolu bezprostředně **nesousedí**.

(Nahrál si např. dvojzvuky d-g, e-a, g-h.)



(CZVV)

1 bod

11 Vypočtete, kolik různých dvojzvuků si Hugo nahrál do telefonu.

Řešení:

Dvojzvuk je neuspořádanou dvojicí vybranou ze sedmi různých prvků (destiček).

Počet všech možností, jak vybrat 2 destičky ze sedmi, je: $\binom{7}{2} = 21$

Mezi sedmi destičkami je 6 dvojic bezprostředně sousedících destiček (c-d, d-e, ..., a-h).

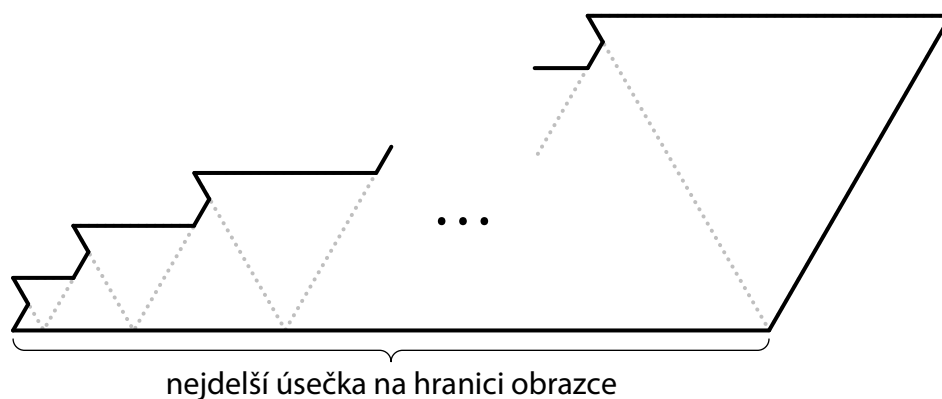
Hugo si do telefonu nahrál **15 dvojzvuků** ($21 - 6 = 15$).

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 12

Zakreslený obrazec se skládá z 50 rovnostranných trojúhelníků.

První z těchto trojúhelníků má stranu délky 1 cm.

Každý další trojúhelník má stranu o 1 cm delší než předchozí trojúhelník.



Nejdelší úsečka na hranici obrazce se skládá z vodorovných stran všech trojúhelníků s lichým pořadím (1., 3., 5. atd.). Každý trojúhelník se sudým pořadím má na této úsečce jeden vrchol.

(CZVV)

max. 2 body

12 Vypočtete v cm

12.1 délku nejdelší úsečky na hranici obrazce,

Řešení:

Délka nejdelší úsečky na hranici obrazce je rovna součtu délek stran 25 trojúhelníků s lichým pořadím, tj. $1 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + \dots + 49 \text{ cm}$.

Sečteme prvních 25 členů aritmetické posloupnosti:

$$n = 25, \quad a_1 = 1, \quad a_{25} = 49$$

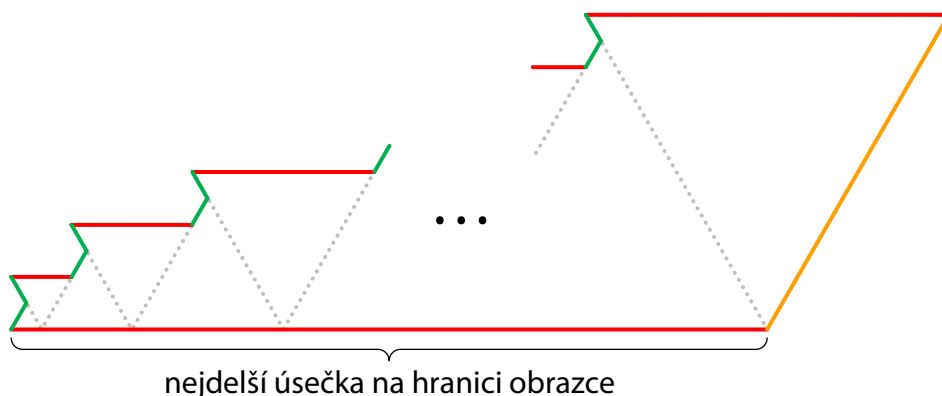
$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

$$s_{25} = \frac{25}{2} \cdot (1 + 49) = \mathbf{625}$$

Délka nejdelší úsečky na hranici obrazce je **625 cm**.

12.2 obvod obrazce.

Řešení:



Celou hranici obrazce obarvíme. Vyznačíme touž barvou:

1. po jedné straně každého z 50 rovnostranných trojúhelníků, z nichž je obrazec složen,
2. 50 úseček délky 1 cm,
3. jednu úsečku délky 50 cm.

Obvod obrazce (v cm): $\frac{50}{2} \cdot (1 + 50) + 50 \cdot 1 + 50 = 1375$

Obvod obrazce je **1375 cm**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

V Kocourkově si klient založil účet a vložil na něj 2 000 zlaťáků. Po uplynutí každého roku se aktuální částka na jeho účtu mávnutím proutku zvětší o polovinu.

Klient na účet žádné další peníze nekládá, ani je z účtu nevybírá.

(CZV)

max. 2 body

13 Vypočtete,

- 13.1 kolik zlaťáků bude mít klient na účtu po dvou letech od jeho založení,
- 13.2 po kolika letech od založení účtu bude mít klient poprvé na účtu přes 1 milion zlaťáků.

Řešení:

Mávnutím proutku probíhá složené úročení; úrokovou míru označme i .

Počáteční vklad (ve zlaťácích) označme K_0 , jistinu po uplynutí n let (po připsání úroků) K_n .

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n, \quad K_0 = 2\,000, \quad i = 0,5$$

13.1 $K_2 = K_0 \cdot (1 + i)^2 = 2\,000 \cdot 1,5^2 = 4\,500$

Po dvou letech bude mít klient na účtu **4 500 zlaťáků**.

- 13.2 Vypočteme, pro jaké n bychom dosáhli $K_n = 1\,000\,000$. Počet let potřebných k dosažení této částky na účtu je nejbližší celé číslo vyšší než vypočtené n .

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 \cdot (1 + i)^n \\ 1\,000\,000 &= 2\,000 \cdot 1,5^n \\ 500 &= 1,5^n \Leftrightarrow n = \log_{1,5} 500 \doteq 15,3 \end{aligned}$$

Částka na účtu přesáhne 1 milion zlaťáků poprvé **po 16 letech**.

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 14

V tabulce s odměnami všech 12 pracovníků firmy chybí nejvyšší odměna.
Aritmetický průměr odměn všech pracovníků je o 20 % větší než medián těchto odměn.

Odměna v korunách	15 000	20 000	25 000	30 000	
Četnost	4	3	2	2	1

(CZVV)

max. 3 body

14 Vypočtete v korunách

14.1 aritmetický průměr odměn všech pracovníků firmy,

Řešení:

Odměny všech 12 pracovníků (v korunách) označme od nejnižší po nejvyšší x_1, x_2, \dots, x_{12} .

$$\text{Med}(x) = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{20\,000 + 20\,000}{2} = 20\,000$$

$$\bar{x} = 1,2 \cdot \text{Med}(x) = 1,2 \cdot 20\,000 = 24\,000$$

Aritmetický průměr odměn všech pracovníků je 24 000 korun.

14.2 nejvyšší odměnu.

Řešení:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{12}}{12}, \quad \bar{x} = 24\,000 \quad (\text{viz řešení úlohy 14.1})$$

$$24\,000 = \frac{4 \cdot 15\,000 + 3 \cdot 20\,000 + 2 \cdot 25\,000 + 2 \cdot 30\,000 + x_{12}}{12}$$

$$288\,000 = 230\,000 + x_{12}$$

$$x_{12} = 58\,000$$

Nejvyšší odměna činila 58 000 korun.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 15

Žebřík je postaven na dvorku s vodorovnou dlažbou a opřen o svislou zeď domu. Dosahuje do výšky 450 cm. Když přisuneme spodní konec žebříku o 88 cm blíž k domu, dosáhne žebřík ještě o 44 cm výš.



(CZVV)

max. 2 body

15 Vypočtete v cm délku žebříku.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení:

Délku žebříku (v cm) označme d , vzdálenost spodního konce žebříku od domu x .

$$d^2 = x^2 + 450^2$$
$$d^2 = (x - 88)^2 + 494^2$$

$$x^2 + 450^2 = (x - 88)^2 + 494^2$$

$$x^2 + 450^2 = x^2 - 176x + 88^2 + 494^2$$

$$176x = 49\,280$$

$$x = 280$$

$$d^2 = x^2 + 450^2$$

$$d^2 = 280^2 + 450^2$$

$$d^2 = 280\,900$$

$$d = 530$$

Délka žebříku je 530 cm.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

V pondělí byli ve třídě všichni žáci a poměr počtu dívek ku počtu chlapců byl 3 : 2.
V úterý chyběly ve třídě pouze 3 dívky a uvedený poměr se změnil na 5 : 4.
Ve středu chyběli 2 chlapci a 2 dívky.
Ve čtvrtek chyběli pouze 2 chlapci.
V pátek nikdo nechyběl.

(CZVV)

max. 2 body

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

- | | A | N |
|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 16.1 V úterý bylo ve třídě přítomno 15 dívek. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 16.2 Ve středu byl poměr počtu dívek ku počtu chlapců roven 3 : 2. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 16.3 Ve čtvrtek bylo ve třídě přítomno 10 chlapců. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 16.4 V pátek bylo ve třídě celkem 28 žáků. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Řešení:

Počet chlapců ve třídě označme c , počet dívek d .

$$\text{Pondělí: } d : c = 3 : 2, \quad d = \frac{3}{2}c$$

$$\text{Úterý: } (d - 3) : c = 5 : 4, \quad d - 3 = \frac{5}{4}c$$

$$\frac{3}{2}c - 3 = \frac{5}{4}c$$

$$c = 12, \quad d = 18$$

$$16.1 \text{ Úterý: } d - 3 = 15$$

Tvrzení 16.1 je **pravdivé**.

$$16.2 \text{ Středa: } (d - 2) : (c - 2) = 16 : 10 \neq 15 : 10 = 3 : 2$$

Tvrzení 16.2 je **nepravdivé**.

$$16.3 \text{ Čtvrtek: } c - 2 = 10$$

Tvrzení 16.3 je **pravdivé**.

$$16.4 \text{ Pátek: } c + d = 30 \neq 28$$

Tvrzení 16.4 je **nepravdivé**.

17 Je dán výraz:

$$\frac{100 \cdot \log_a a^{25}}{\log_5 25^{100}}$$

Který z následujících výrazů je pro každé $a \in (1; +\infty)$ ekvivalentní s daným výrazem?

A) 25

B) 12,5

C) $0,2a$

D) $0,5a^{25}$

E) Žádný z uvedených výrazů není s daným výrazem ekvivalentní.

Řešení:

$$\frac{100 \cdot \log_a a^{25}}{\log_5 25^{100}} = \frac{100 \cdot 25}{\log_5 (5^2)^{100}} = \frac{2500}{\log_5 5^{200}} = \frac{2500}{200} = 12,5$$

18 Pro kterou z následujících nerovnic je množinou všech řešení v oboru \mathbb{R} interval $(-1; 3)$?

A) $\frac{x-3}{x^2+1} < 0$

B) $(x+1)(3-x) < 0$

C) $(x+1)(x-3) < 0$

D) $\frac{3-x}{x+1} \geq 0$

E) $\frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$

Řešení:

A) $\frac{x-3}{x^2+1} < 0 \Leftrightarrow x-3 < 0, \quad K_A = (-\infty; 3)$

B) $(x+1)(3-x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0, \quad K_B = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

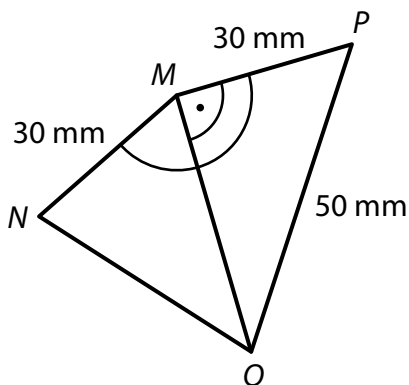
C) $(x+1)(x-3) < 0, \quad K_C = (-1; 3)$

D) $\frac{3-x}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} \leq 0, \quad K_D = (-1; 3)$

E) $\frac{x^2-9}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+3)}{x+1} \geq 0, \quad K_E = (-3; -1) \cup (3; +\infty)$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Ve čtyřúhelníku $MNOP$ platí:
 $|MN| = |MP| = 30 \text{ mm}$, $|OP| = 50 \text{ mm}$, $|\sphericalangle NMP| = 150^\circ$, $|\sphericalangle OMP| = 90^\circ$



(CZVV)

2 body

19 Jaká je délka strany NO ?

Výsledek je zaokrouhlen na celé mm.

- A) 31 mm
- B) 33 mm
- C) 36 mm
- D) 40 mm
- E) větší než 41 mm

Řešení:

Délky stran čtyřúhelníku $MNOP$ označme po řadě m , n , o , p a délku úhlopříčky MO označme q . Velikost vnitřního úhlu trojúhelníku MNO při vrcholu M označme φ .

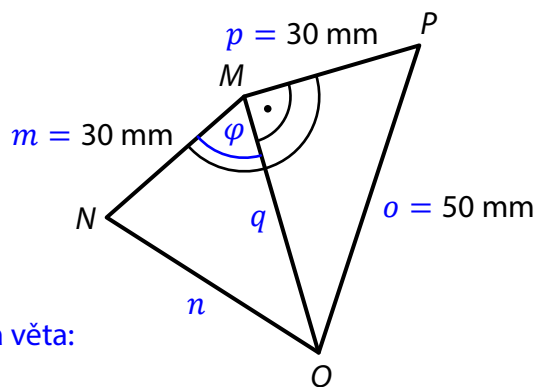
$$m = p = 30 \text{ mm}, \quad o = 50 \text{ mm}$$
$$\varphi = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$$

V pravouhlém trojúhelníku MOP platí Pythagorova věta:

$$o^2 = p^2 + q^2$$
$$q = \sqrt{o^2 - p^2}$$
$$q = \sqrt{50^2 - 30^2} \text{ mm} = 40 \text{ mm}$$

V trojúhelníku MNO uijeme kosinovou větu:

$$n^2 = m^2 + q^2 - 2mq \cos \varphi$$
$$n = \sqrt{m^2 + q^2 - 2mq \cos \varphi}$$
$$n = \sqrt{30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ} \text{ mm} = \sqrt{1300} \text{ mm} \doteq 36 \text{ mm}$$



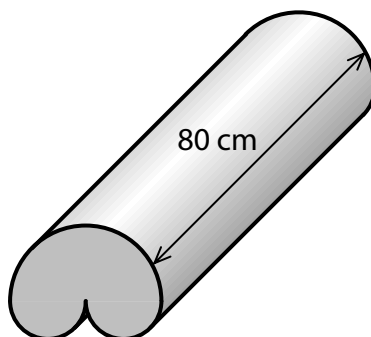
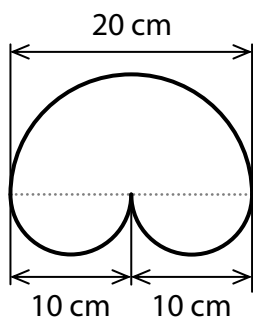
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 20–21

Molitanová balanční podložka je těleso složené ze tří půlválců (částí rotačních válců).

Podstavou největšího půlválce je půlkruh s průměrem 20 cm a podstavami dvou stejných menších půlválců jsou půlkruhy s průměrem 10 cm.

Výšky všech půlválců jsou 80 cm.

Podstava podložky



(CZVV)

2 body

20 Jaký je objem balanční podložky?

- A) $4\pi \text{ dm}^3$
- B) $5\pi \text{ dm}^3$
- C) $6\pi \text{ dm}^3$
- D) $8\pi \text{ dm}^3$
- E) jiný objem

Řešení:

Poloměr podstavy největšího půlválce označme R , poloměr podstav menších půlválců r .
U balanční podložky označme obsah podstavy S_p , výšku v a objem V .

$$R = \frac{20 \text{ cm}}{2} = 1 \text{ dm}, \quad r = \frac{10 \text{ cm}}{2} = \frac{1}{2} \text{ dm}, \quad v = 80 \text{ cm} = 8 \text{ dm}$$

$$V = S_p \cdot v, \quad S_p = \frac{1}{2} \pi R^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot (R^2 + 2r^2)$$

$$V = \frac{1}{2} \pi \cdot (R^2 + 2r^2) \cdot v$$

$$V = \frac{1}{2} \pi \cdot \left[1^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] \cdot 8 \text{ dm}^3 = 6\pi \text{ dm}^3$$

21 Jaký je povrch balanční podložky (včetně obou podstav)?

- A) menší než $1600\pi \text{ cm}^2$
- B) $1600\pi \text{ cm}^2$
- C) $1675\pi \text{ cm}^2$
- D) $1750\pi \text{ cm}^2$
- E) větší než $1750\pi \text{ cm}^2$

Řešení:

Použijeme značení a vztahy z úlohy 20.

U balanční podložky dále označme obvod podstavy o_p , obsah pláště S_{pl} a povrch S .

$$R = 10 \text{ cm}, \quad r = 5 \text{ cm}, \quad v = 80 \text{ cm}$$

$$S = S_{pl} + 2 \cdot S_p, \quad S_{pl} = o_p \cdot v, \quad S_p = \frac{1}{2} \pi \cdot (R^2 + 2r^2)$$

$$o_p = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi \cdot (R + 2r)$$

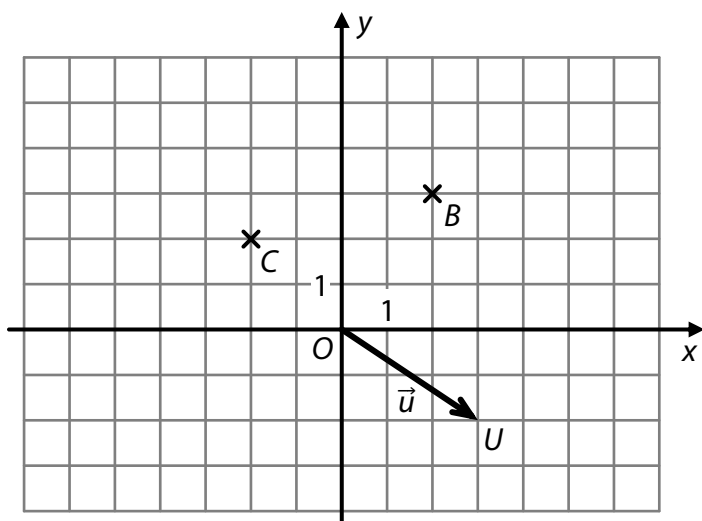
$$S_{pl} = \pi \cdot (R + 2r) \cdot v$$

$$S = \pi \cdot (R + 2r) \cdot v + 2 \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot (R^2 + 2r^2) = \pi \cdot (Rv + 2rv + R^2 + 2r^2)$$

$$S = \pi \cdot (10 \cdot 80 + 2 \cdot 5 \cdot 80 + 10^2 + 2 \cdot 5^2) \text{ cm}^2 = 1750\pi \text{ cm}^2$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojíme bod A tak, aby orientované úsečky \overrightarrow{AB} a \overrightarrow{OU} určovaly tentýž vektor \vec{u} .



Body B, C, U jsou mřížové body.

(CZVV)

2 body

22 Jaká bude vzdálenost bodů A, C ?

- A) menší než $\sqrt{10}$
- B) $\sqrt{10}$
- C) 5
- D) $\sqrt{50}$
- E) větší než $\sqrt{50}$

Řešení:

Zakreslíme vektor \vec{u} tak, aby koncovým bodem jeho umístění byl bod B . Počáteční bod tohoto umístění je bod A .

$$|AC| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Počtení řešení:

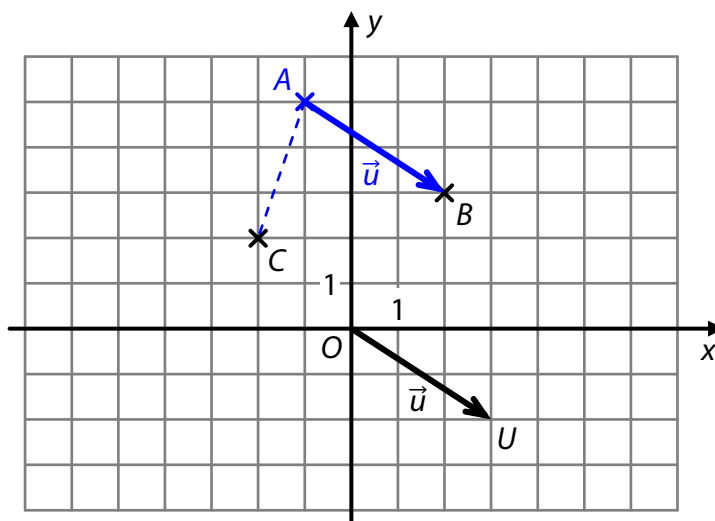
$$B[2; 3], C[-2; 2], O[0; 0], U[3; -2]$$

$$\vec{u} = U - O = (3; -2)$$

$$\vec{u} = B - A, \quad A = B - \vec{u}$$

$$A = [2; 3] - (3; -2) = [-1; 5]$$

$$|AC| = \sqrt{(-2 - (-1))^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{10}$$



VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 23

V rovině leží body $A[-5; 3]$, $B[-1; 5]$ a přímka $o: y = -x$.

Bod S je střed úsečky AB .

(CZVV)

2 body

23 Který z následujících bodů je obrazem bodu S v osové souměrnosti s osou o ?

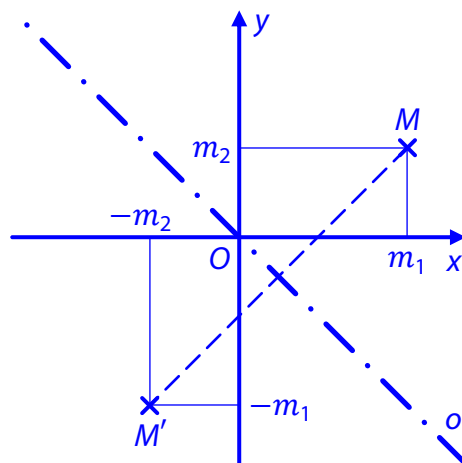
- A) $[-4; 3]$
- B) $[-4; -3]$
- C) $[4; -3]$
- D) $[3; -4]$
- E) $[-3; -4]$

Řešení:

$$S = \left[\frac{-5 + (-1)}{2}; \frac{3 + 5}{2} \right] = [-3; 4]$$

Obrazem libovolného bodu $M[m_1; m_2]$ v osové souměrnosti s osou $o: y = -x$ je bod $M'[-m_2; -m_1]$.

Obrazem bodu $S[-3; 4]$ je tedy bod $[-4; 3]$.



VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 24

Z číslic 0, 1, 2, 3 jsou sestavena všechna trojmístná (neboli trojčíferná) čísla, ve kterých se číslice **neopakují**. (Trojmístné číslo nezačíná číslicí 0.)

(CZVV)

2 body

24 Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném výběru jednoho z těchto čísel vybereme číslo liché?

- A) $\frac{1}{2}$
- B) $\frac{2}{9}$
- C) $\frac{2}{3}$
- D) $\frac{4}{9}$

E) jiná hodnota pravděpodobnosti

Řešení:

Počet všech možných výsledků, tj. počet všech trojmístných čísel splňujících podmínky:
 $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$

Lichá trojmístná čísla mají na třetí pozici lichou číslici (1 nebo 3), což jsou 2 možnosti.
Na první pozici nemůže být číslice nula ani číslice ze třetí pozice, zbývají tedy 2 možnosti.
Po obsazení první a třetí pozice zbývají na druhou pozici 2 možnosti.

Počet výsledků příznivých požadovanému jevu L (náhodně vybrané číslo je liché):
 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Pravděpodobnost jevu L: $P(L) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

25 Každá funkce daná některým z předpisů 25.1–25.4 je definována pro všechna $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Přiřadte ke každému předpisu funkce (25.1–25.4) útvar (A–F), na němž leží všechny body grafu této funkce.

25.1 $y = \frac{2x^3}{x}$ E

25.2 $y = \frac{x^2}{x \cdot \sqrt{2}}$ A

25.3 $y = \frac{x \cdot \sqrt{2}}{x}$ B

25.4 $y = \frac{x^2}{2x^3}$ F

- A) přímka různoběžná se souřadnicovými osami
- B) přímka rovnoběžná se souřadnicovou osou x
- C) přímka rovnoběžná se souřadnicovou osou y
- D) parabola souměrná podle souřadnicové osy x
- E) parabola souměrná podle souřadnicové osy y
- F) hyperbola

Řešení:

25.1 Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ platí:

$$y = \frac{2x^3}{x} = 2x^2$$

Grafem kvadratické funkce $y = 2x^2$ je parabola souměrná podle souřadnicové osy y .

25.2 Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ platí:

$$y = \frac{x^2}{x \cdot \sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x$$

Grafem lineární funkce $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x$ je přímka různoběžná se souřadnicovými osami.

25.3 Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ platí:

$$y = \frac{x \cdot \sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}$$

Grafem konstantní funkce $y = \sqrt{2}$ je přímka rovnoběžná se souřadnicovou osou x .

25.4 Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ platí:

$$y = \frac{x^2}{2x^3} = \frac{1}{2x} = \frac{0,5}{x}$$

Grafem lineární lomené funkce $y = \frac{0,5}{x}$ je hyperbola.

26 Pro $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ přiřadte ke každému výrazu (26.1–26.3) jeho ekvivalentní vyjádření (A–E).

26.1 $\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x$ D

26.2 $\cos 2x + 1$ E

26.3 $\frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$ A

A) $\sin^2 x$

B) $\cos^2 x$

C) $2 \cdot \sin x$

D) $2 \cdot \sin^2 x$

E) $2 \cdot \cos^2 x$

Řešení:

$$26.1 \quad \operatorname{tg} x \cdot \sin 2x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \sin^2 x$$

$$26.2 \quad \cos 2x + 1 = \cos^2 x - \sin^2 x + 1 = \cos^2 x + \cos^2 x = 2 \cdot \cos^2 x$$

$$26.3 \quad \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \sin^2 x$$