

# MATEMATIKA ROZŠIŘUJÍCÍ

MXMVD21C0T01

## DIDAKTICKÝ TEST

**Maximální bodové hodnocení: 50 bodů**  
**Hranice úspěšnosti: 33 %**

### 1 Základní informace k zadání zkoušky

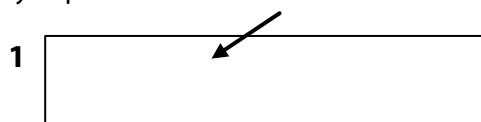
- **Didaktický test** obsahuje **22 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi píšete do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–11) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 12–22) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

### 2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** písíčí propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

### 2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

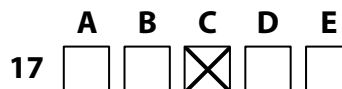
- Výsledky **píšete čitelně** do vyznačených bílých polí.



- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapíšte správné řešení.

### 2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvete původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

**TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!**

1 bod

1 Výraz s proměnnou  $x \in \mathbf{R}$  rozložte na součin lineárních dvojčlenů.

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 =$$

1 bod

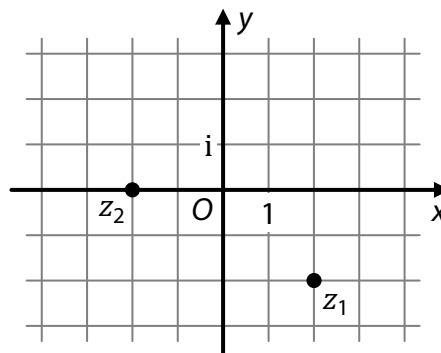
2 Jestliže mnohočlen  $P(x)$  s proměnnou  $x \in \mathbf{R}$  vydělíme trojčlenem  $(x^2 + x + 2)$ , dostaneme neúplný podíl  $(x - 2)$  a zbytek  $(-4)$ .

Určete mnohočlen  $P(x)$ .

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 3

V Gaussově rovině jsou (v mřížových bodech) zobrazena komplexní čísla  $z_1$  a  $z_2$ .

Platí:  $z = z_1 : z_2$ .



(CZVV)

1 bod

3 Zapište číslo  $z$  v goniometrickém tvaru tak, aby jeho argument  $\varphi$  byl z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$ .

#### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

Výrobní družstvo vyrobilo sadu stejných sekaček, každou s týmiž náklady na její výrobu. Polovinu sekaček družstvo prodalo za cenu o 70 % vyšší, než byly náklady na jejich výrobu. Každou další sekačku družstvo prodává za cenu o 50 % vyšší, než byly náklady na její výrobu.

Přestože družstvo ještě neprodalo všechny sekačky, peníze získané za prodané sekačky již nyní přesně pokryly náklady na výrobu celé sady sekaček.

(CZVV)

**max. 3 body**

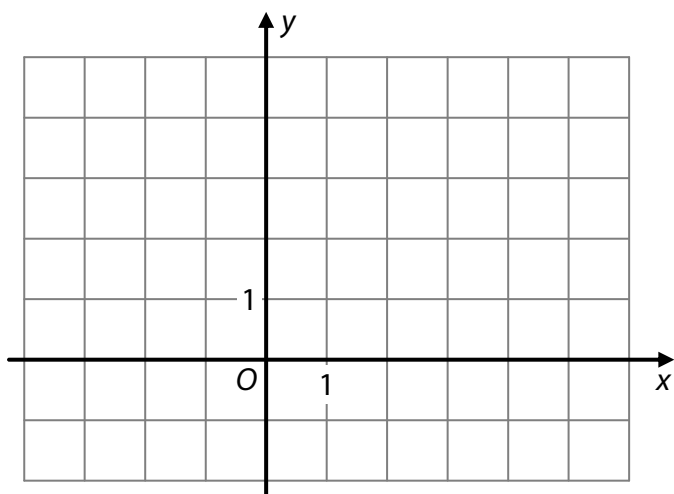
**4 Vypočtete, kolik procent všech vyrobených sekaček již družstvo prodalo.**

**V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.**

### VÝCHOZÍ TEXT, OBRÁZEK A TABULKA K ÚLOZE 5

Pro všechna  $x \in \mathbf{R}$  je dána funkce  $f: y = a^x$ , kde  $a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$  a pro kterou platí:

$$a^{x+2} = 2 \cdot a^x$$



$x$	-2	0	2	4
$a^x$		1		

(CZVV)

**max. 2 body**

**5**

5.1 Zakreslete graf funkce  $f$  v kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  a vyznačte v grafu všechny body, jejichž  $x$ -ové souřadnice jsou uvedeny v tabulce (chybějící  $y$ -ové souřadnice dopočtete).

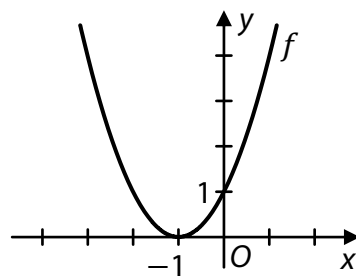
**V záznamovém archu** obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

5.2 Vypočtete hodnotu  $f(1)$ .

## VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 6

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je sestrojen graf kvadratické funkce  $f$  s definičním oborem  $\mathbf{R}$ .

Pro funkci  $g$  platí:  $g(x) = -f(x + 2)$ .



(CZVV)

**max. 2 body**

**6**

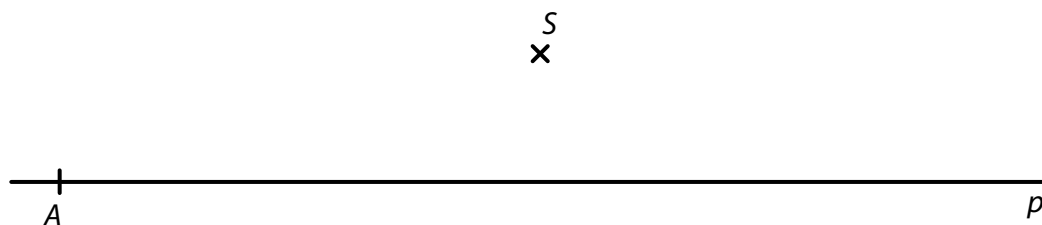
6.1 Definiční obor funkce  $g$  lze zapsat jako sjednocení  $(I_1 \cup I_2)$  takových dvou intervalů, že v každém z nich je funkce  $g$  monotónní.

Z obou těchto intervalů zapište ten interval, v němž je funkce  $g$  klesající.

6.2 Určete souřadnice průsečíku  $Y$  grafu funkce  $g$  se souřadnicovou osou  $y$ .

## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

V rovině leží body  $A, S$ . Bodem  $A$  prochází přímka  $p$ .



(CZVV)

**max. 3 body**

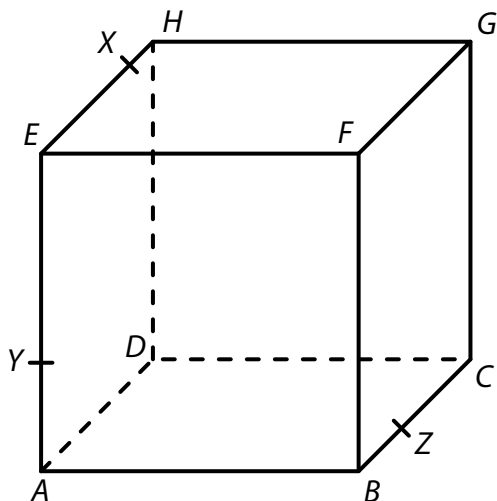
- 7** Bod  $A$  je vrchol obdélníku  $ABCD$ . Na přímce  $p$  leží ještě vrchol  $C$  obdélníku.  
Bod  $S$  je střed strany  $CD$  obdélníku  $ABCD$ .
- 7.1 Hledáme vrcholy  $B, C, D$  obdélníku  $ABCD$ .  
Proveďte náčrtek obdélníku  $ABCD$  a запиšte rozbor nebo postup konstrukce.

- 7.2 V obrázku sestrojte chybějící vrcholy obdélníku  $ABCD$  a obdélník narýsujte.  
Najděte všechna řešení.

**V záznamovém archu** obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V krychli  $ABCDEFGH$  leží bod  $X$  na hraně  $EH$ , bod  $Y$  leží na hraně  $AE$  a bod  $Z$  na hraně  $BC$ .



(CZVV)

max. 2 body

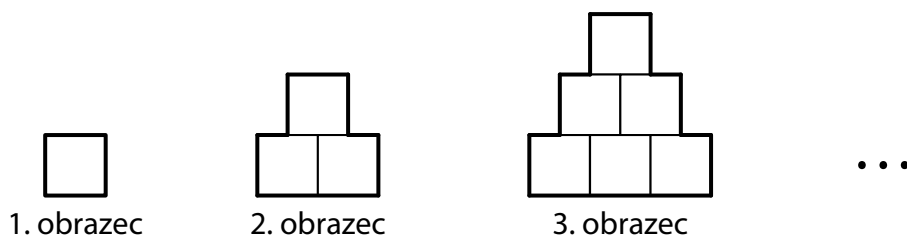
**8 Sestrojte řez krychle  $ABCDEFGH$  rovinou  $XYZ$ .**

**V záznamovém archu obtáhněte vše propisovací tužkou.**

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Na obrázku jsou nakresleny tři obrazce složené ze čtverců o straně délky 1 cm.

Za těmito obrazci následují další. Obrazec s pořadovým číslem  $n > 1$  se vytvoří z předchozího obrazce přidáním spodní řady, která obsahuje  $n$  čtverců.



(CZVV)

**max. 3 body**

**9** Jeden z obrazců je složen z 210 čtverců.

9.1 Vypočtěte, kolikátý je tento obrazec.

9.2 Vypočtěte v cm obvod tohoto obrazce.

**V záznamovém archu** uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

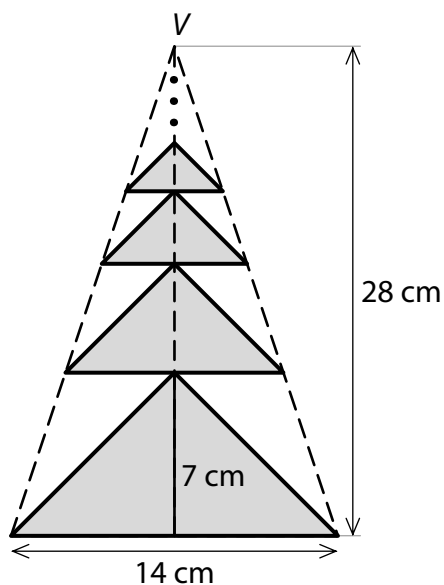


### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Šedý obrazec je složen z nekonečně mnoha rovnoramenných trojúhelníků. Každé dva sousední trojúhelníky mají právě jeden společný bod a jsou obrazem a vzorem ve stejnoolehlosti se středem  $V$ . Na obrázku jsou zakresleny pouze 4 trojúhelníky.

V největším trojúhelníku má základna délku 14 cm a výška na základnu velikost 7 cm.

Výška celého obrazce je 28 cm.



(CZVV)

max. 3 body

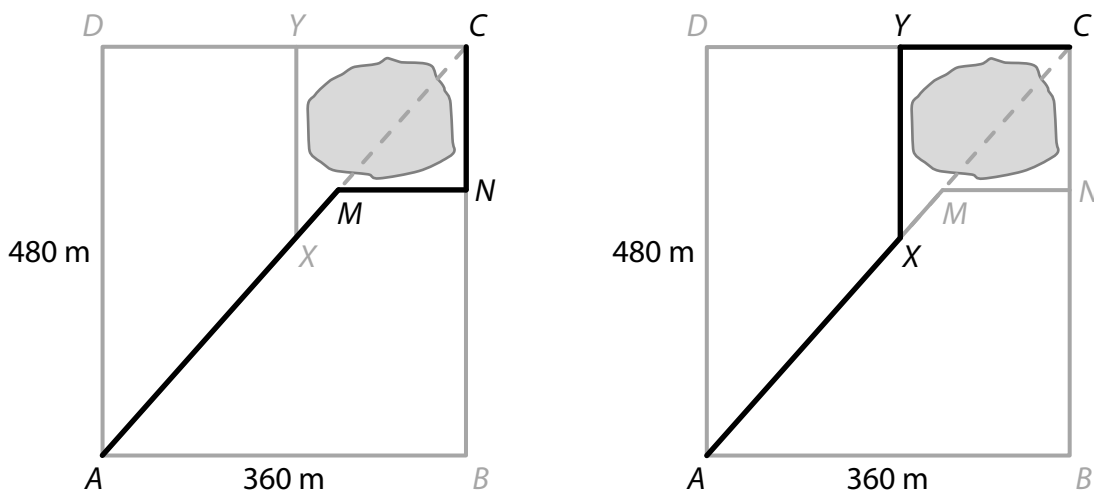
**10** Vypočtete v  $\text{cm}^2$  obsah šedého obrazce.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

Obdélníkový pozemek  $ABCD$  má rozměry 360 m a 480 m. Uvnitř pozemku je rybníček.

První cestu mezi protějšími rohy pozemku představuje lomená čára  $AMNC$ , druhou cestu lomená čára  $AXYC$ . Oba body  $X, M$  leží na úhlopříčce  $AC$ , body  $N, Y$  na stranách obdélníku a úsečky  $MN, XY$  jsou rovnoběžné se stranami obdélníku.



(CZVV)

**max. 4 body**

**11**

11.1 U první cesty tvoří délka úsečky  $AM$  dvě třetiny délky úhlopříčky  $AC$ .

**Vypočtete, v jakém poměru je délka úsečky  $AM$  ku délce lomené čáry  $MNC$ .**

11.2 U druhé cesty je délka úsečky  $AX$  stejná jako délka lomené čáry  $XYC$ .

**Vypočtete v metrech délku lomené čáry  $AXYC$  představující druhou cestu.**

**V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý postup řešení.**

**12 Přiřadte ke každé úloze (12.1–12.3) její řešení (A–F).**

- 12.1 Ota má 8 her a Šimon 6 her (všech 14 her je navzájem různých).  
Ota vymění kterékoli 2 své hry za libovolné 2 Šimonovy hry.

**Kolika způsoby si chlapani mohou hry takto vyměnit?** \_\_\_\_\_

- 12.2 Na digitálních hodinách se každý časový údaj (v hodinách a minutách) mezi půlnocí a 10. hodinou zobrazuje právě **třemi** číslicemi (např. 0:08, 0:21, 9:50).

**Kolik z těchto časových údajů obsahuje tři vzájemně různé číslice?** \_\_\_\_\_

- 12.3 V kině je posledních 5 volných míst v páté řadě a 2 místa ve druhé řadě.  
Čtyři ze sedmi příchozích chtějí sedět v páté řadě, jedna osoba ve druhé řadě  
a zbývající dvěma osobám je řada lhostejná.

**Kolika způsoby je možné na jednotlivá místa rozsadit těchto 7 osob  
v souladu s jejich požadavky?** \_\_\_\_\_

- A) 420
- B) 432
- C) 458
- D) 480
- E) 486
- F) jiný počet

max. 3 body

13 Přímka  $p: y = x$  protíná kuželosečku v bodech  $M, N$ .

**Přiřadte ke každé kuželosečce (13.1–13.3) vzdálenost (A–F) bodů  $M, N$ .**

13.1 Kružnice se středem  $S[0; 0]$ , která prochází bodem  $A[-4; 2]$ . \_\_\_\_\_

13.2 Elipsa daná rovnicí  $x^2 + 4y^2 - 40 = 0$ . \_\_\_\_\_

13.3 Parabola s vrcholem  $V[0; -1,5]$  a ohniskem  $F[0; -1]$ . \_\_\_\_\_

A)  $4\sqrt{2}$

B)  $2\sqrt{10}$

C) 8

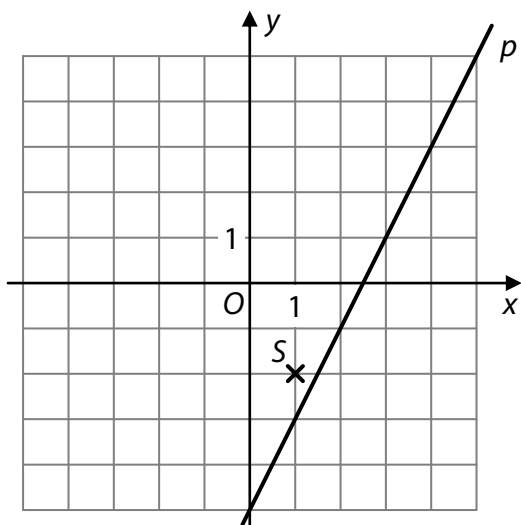
D)  $4\sqrt{5}$

E) 16

F) jiná vzdálenost

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je zakreslena přímka  $p$  a bod  $S$ .



(Bod  $S$  je mřížový, přímka  $p$  prochází 6 mřížovými body zobrazené části čtvercové sítě.)

(CZVV)

**2 body**

**14** Přímka  $q$  je obrazem přímky  $p$  ve středové souměrnosti se středem  $S$ .

**Která rovnice je obecnou rovnicí přímky  $q$ ?**

- A)  $x - 2y + 4 = 0$
- B)  $x - 2y - 4 = 0$
- C)  $2x - y + 5 = 0$
- D)  $2x - y + 3 = 0$
- E)  $2x - y - 3 = 0$

**2 body**

**15** **Která nerovnice má v oboru  $\mathbb{R}$  tutéž množinu všech řešení jako nerovnice  $x - 1 < 0$ ?**

- A)  $\frac{x - 1}{-3} < 0$
- B)  $\frac{x^2 + 1}{x - 1} < 0$
- C)  $\frac{x^2 - 1}{x + 1} < 0$
- D)  $\frac{x(x - 1)}{x} < 0$
- E)  $\frac{x - 1}{x^2} < 0$

16 Je dáno číslo:

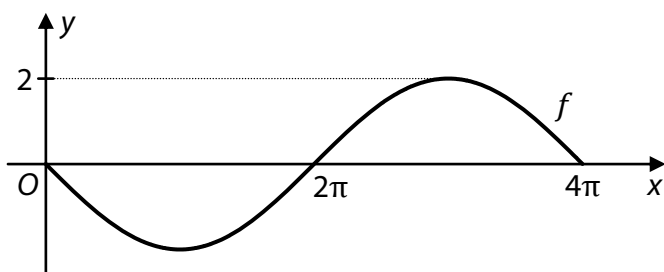
$$a = \frac{81^{121} - 3^{481}}{27^{60} \cdot 9^{10}}$$

**Které tvrzení je pravdivé?**

- A) Číslo  $a$  není celé číslo.
- B) Číslo  $a$  je liché.
- C) Číslo  $a$  je násobkem třinácti.
- D) Číslo  $a$  je větší než  $81^{71}$ .
- E) Číslo  $a$  je možné zapsat ve tvaru  $3^k$ , kde  $k \in \mathbf{N}$ .

### VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 17

Funkce  $f$  s proměnnou  $x \in \langle 0; 4\pi \rangle$  má předpis ve tvaru  $y = a \cdot \sin(bx)$ , kde  $a, b \in \mathbf{R}$ .  
Funkce  $f$  je určena následujícím grafem.



(CZVV)

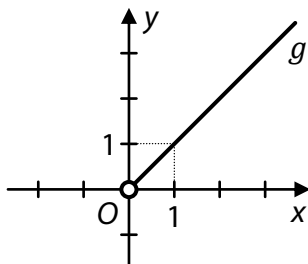
2 body

17 **Která z množin je množinou všech  $x \in \langle 0; 4\pi \rangle$ , pro něž platí  $f(x) > -1$ ?**

- A)  $\left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left( \frac{5\pi}{6}; 4\pi \right)$
- B)  $\left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left( \frac{5\pi}{3}; 4\pi \right)$
- C)  $\langle 0; \pi \rangle \cup (\pi; 4\pi)$
- D)  $\left\langle 0; \frac{7\pi}{3} \right\rangle \cup \left( \frac{11\pi}{3}; 4\pi \right)$
- E)  $\left( \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right)$

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

Polopřímka bez počátečního bodu zakreslená v kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je grafem funkce  $g$ .



(CZVV)

**2 body**

- 18** Každá z pěti funkcí  $h_1-h_5$  je definována pro všechna  $x \in \mathbf{R}$ , pro která má smysl výraz na pravé straně jejího předpisu.

**Která z funkcí  $h_1-h_5$  má stejný graf jako funkce  $g$ ?**

- A)  $h_1: y = \frac{\log_5 x^2}{\log_5 x}$
- B)  $h_2: y = \frac{2x \cdot \log_5 x}{\log_5 x^2}$
- C)  $h_3: y = 5^{\log_5 x}$
- D)  $h_4: y = \log_5 5^x$
- E)  $h_5: y = \frac{(\log_5 5^x)^2}{x}$

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 19

V balíčku je 12 karet očíslovaných přirozenými čísly od 1 do 12.  
(Každá karta obsahuje právě jedno číslo, žádné dvě karty nejsou očíslovány stejným číslem.)  
Balíček zamícháme a náhodně vytáhneme dvojici karet.

(CZVV)

**2 body**

**19 Jaká je pravděpodobnost, že součet obou čísel na tažených kartách je dělitelný šesti?**

A)  $\frac{1}{22}$

B)  $\frac{4}{33}$

C)  $\frac{3}{22}$

D)  $\frac{5}{33}$

E) jiná hodnota pravděpodobnosti

---

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

Uvažujme dvě tělesa – **rotační válec** a **polokouli**.

Výška válce je o polovinu větší než poloměr  $r$  jeho podstavy.

Povrch polokoule (tedy včetně podstavy) je stejný jako povrch válce. Poloměr polokoule označme  $R$ .

(CZVV)

**2 body**

**20 Který vztah vyjadřuje závislost poloměrů  $R$  a  $r$ ?**

A)  $R = r$

B)  $R = \frac{5}{3} \cdot r$

C)  $R = \sqrt{3} \cdot r$

D)  $R = \frac{\sqrt{30}}{2} \cdot r$

E)  $R = \frac{\sqrt{15}}{3} \cdot r$



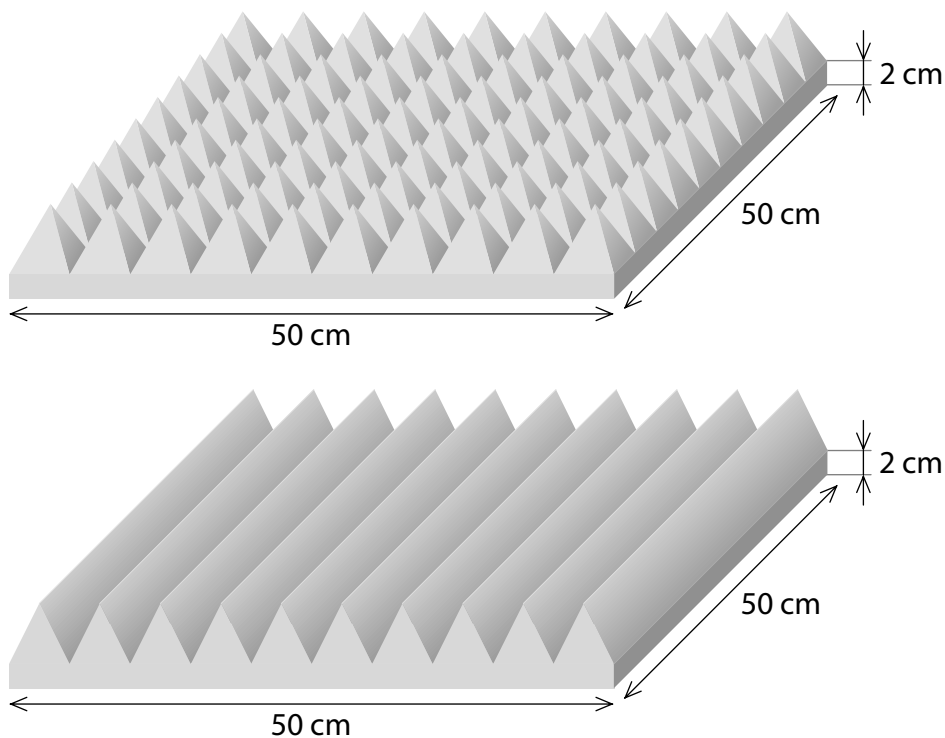
## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Profilované desky z akustické pěny se vyrábějí ve dvou provedeních.

Spodní část každé desky tvoří **platforma** tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou délky 50 cm a výškou 2 cm.

**V prvním** provedení horní podstavu platformy zcela pokrývá 100 shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů. V každém jehlanu je výška stejná jako délka podstavné hrany.

**Ve druhém** provedení horní podstavu platformy zcela pokrývá 10 shodných kolmých trojbokých hranolů. Podstava trojbokého hranolu má tvar rovnoramenného trojúhelníku, který přilehá k platformě svou základnou. Výška na základnu je stejná jako délka základny.



(CZVV)

2 body

**21 Jaký je poměr objemů obou provedení akustických desek (větší objem ku menšímu)?**

- A) 27 : 22
- B) 14 : 9
- C) 3 : 2
- D) 2 : 1
- E) jiný poměr

## VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 22

Právě tři skupiny vězňů A, B, C vyráběly ochranné pláště pro zdravotníky. Každý vězeň téže skupiny ušil stejný počet plášťů.

Ve **skupině A** je  $p$  vězňů a **každý** z nich ušil  $(2p - 1)$  plášťů.

**Skupina B** má o  $p$  vězňů více než skupina A, ale **celkem** vyrobila o  $p$  plášťů méně než skupina A.

**Skupina C** má sice o 1 vězně méně než skupina A, každý její vězeň však ušil o 2 pláště více, než ušil každý vězeň skupiny A.

Skupina	A	B	C
Počet vězňů	$p$		
Počet plášťů, které ušil jeden vězeň	$2p - 1$		
Celkový počet vyrobených plášťů			

(CZVV)

max. 3 body

**22 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (22.1–22.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).**

- |  | A                        | N                        |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 22.1 Ze všech vězňů, kteří šili pláště, je méně než polovina ve skupině B.         | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 22.2 Každý vězeň skupiny A ušil o $p$ plášťů více, než ušil každý vězeň skupiny B. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 22.3 Skupina C celkem vyrobila více plášťů než skupina A.                          | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

---

**ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.**

---