73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

# Návodné a doplňující úlohy pro kategorii C

**V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.**

**1.** *Existuje deset po sobě jdoucích přirozených čísel, která jsou po řadě dělitelná čísly 9, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, 9?* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Petr napsal na tabuli 7 po sobě jdoucích přirozených čísel. Pavel je neviděl, avšak tvrdí, že jedno z nich je dělitelné sedmi. Má pravdu? Proč?

N2. Myslím si přirozené číslo. Pokud jej zmenším o 1, dostanu číslo dělitelné 3. Pokud myšlené číslo zmenším o 2, dostanu číslo dělitelné 4. a) Jaké nejmenší číslo si můžu myslet? b) Najděte všechna čísla, která si můžu myslet.

N3. Blechy Adam a Bára skáčou po očíslovaných schodech stále nahoru. Adam začíná na 1. schodu a skáče o $a$ schodů. Blecha Bára začíná na 3. schodu a skáče o $b$ schodů. Schody, na které obě blechy doskočí, nazveme „dvakrát navštívené“. Určete nejmenší kladný rozdíl pořadových čísel dvakrát navštívených schodů, a to v případech a) $a = 4$ a $b = 5$, b) $a = 4$ a $b = 6$, c) $a = 6$ a $b = 9$.

D1. Rozmyslete si, proč z $n$ po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy právě jedno dělitelné číslem $n$.

D2. Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde.

D3. Čtyři dny po sobě jsem zdolával stejné schodiště o méně než 100 schodech. Bral jsem ho první den po 2 schodech, druhý den po 3, třetí den po 4 a čtvrtý den po 5 schodech, na poslední krok mi zbyly po řadě 1, 2, 3 a 4 schody. Kolik schodů celé schodiště mělo?

D4. Myslím si přirozené číslo, které je větší než 2000, menší než 3000 a je dělitelné 17. Pokud myšlené číslo zvětším o 1, dostanu číslo dělitelné 11. Pokud své číslo naopak zmenším o 1, dostanu číslo dělitelné 6. Jaké číslo si myslím?

*Doplňující literatura*: Své poznatky a dovednosti k tématu úlohy si můžete zopakovat a doplnit podle brožurky Františka Veselého *O dělitelnosti čísel celých*. Zájemcům o hlubší poučení doporučujeme studijní text Seriál – Teorie čísel.

**2.** *Pro střed $M$ přepony $AC$ pravoúhlého trojúhelníku $ABC$ platí $|BC| = |CM|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $ABC$ a $ABM$ mají stejné poloměry.*

(Michal Pecho)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechny rovnoramenné trojúhelníky, které mají aspoň jeden vnitřní úhel velikosti a) 30°, b) 60°.

N2. Bez užití Thaletovy věty dokažte, že střed kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku splývá se středem jeho přepony. Využijte k tomu vhodně dvě střední příčky.

N3. Uvažme šest bodů: vrcholy daného rovnostranného trojúhelníku a středy jeho stran. Zjistěte, kolik pravoúhlých trojúhelníků má za vrcholy tři ze šesti uvažovaných bodů.

D1. V daném pravoúhlém trojúhelníku $ABC$ označme $K$ střed přepony $AB$ a $L$ střed kratší odvěsny $AC$. Kružnice s průměrem $BC$ protne úsečku $KL$ v bodě $P$. Dokažte, že úhly $PAC$ a $PBC$ jsou shodné.

D2. Je dán trojúhelník $ABC$, v němž $D$, $E$ jsou po řadě středy jeho stran $BC$, $AB$. Nechť $F$ je střed úsečky $BE$ a $G$ vnitřní bod strany $AC$, pro nějž platí $|AG| = 3|CG|$. Dokažte, že průsečík přímek $DF$ a $GE$ leží na té rovnoběžce s přímkou $BC$, která prochází bodem $A$.

D3. Šestiúhelník, jehož všechny vnitřní úhly mají stejnou velikost, má čtyři po sobě jdoucí strany o délkách 1, 7, 4 a 2. Zjistěte délku zbývajících dvou stran.

**3.** *Uvažujme* 20 *výroků:*

| | |
|---|---|
| *„Mám právě jednu sestru.“* | *„Mám právě jednoho bratra.“* |
| *„Mám právě dvě sestry.“* | *„Mám právě dva bratry.“* |
| ⋮ | ⋮ |
| *„Mám právě deset sester.“* | *„Mám právě deset bratrů.“* |

*a) Každý ze čtyř sourozenců pronesl jiný z těchto* 20 *výroků. Je možné, že všichni čtyři měli pravdu?*

*b) Najděte největší přirozené číslo $n$ takové, že každý z $n$ sourozenců může pronést jiný z těchto* 20 *výroků a mít pravdu.** (Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. V jedné rodině žije a) 7 bratrů bez sestry, b) 7 bratrů a 1 sestra. Každý z nich pronese jedno pravdivé prohlášení z nabídky v soutěžní úloze. Určete maximální počet různých výroků, které mohou zaznít.

N2. Mějme $n$ navzájem různých přirozených čísel. Každé z nich obarvíme buď modře, nebo červeně. Zjistěte, pro jaké nejmenší $n$ už zaručeně najdeme dvě čísla stejné barvy, jejichž rozdíl je sudý.**

* Všichni sourozenci mají stejné rodiče.

** Jak k řešení této, tak i mnoha podobných úloh lze využít *Dirichletův princip*, zvaný též *přihrádkový princip*. Více se můžete dozvědět v brožurce Lva Bukovského *Dirichletov princíp*.

D1. Do pytle je naházeno 5 párů černých, 6 párů modrých a 7 párů šedých papučí, přitom páry papučí téže barvy jsou nerozlišitelné. Kolik papučí musíme vytáhnout, abychom určitě mezi nimi měli a) dvě papuče stejné barvy, b) dvě papuče stejné barvy, které tvoří pár?

D2. Na Ostrově Logiky patří každý jeho obyvatel buď mezi poctivce, kteří říkají vždy pravdu, nebo mezi lháře, kteří vždycky lžou. U stolu se sejdou tři obyvatelé tohoto ostrova – Oliver, Pavel a Romana. Oliver řekne: „Mezi námi není ani jeden poctivec." Pavel dodá: „Mezi námi je právě jeden poctivec." Je Romana poctivec, nebo lhář?

D3. Na Ostrov Logiky z úlohy D2 zavítá turista, který si najme místního průvodce. Při cestě uvidí v dáli dalšího domorodce. Turista za ním vyšle svého průvodce, aby se jej zeptal, zda je poctivcem, nebo lhářem. „Tvrdí, že je poctivec," přinese zprávu průvodce. Je průvodce poctivec, nebo lhář?

Výroky poctivců a lhářů proslavila dodnes populární kniha s názvem *Jak se jmenuje tahle knížka?*, kterou napsal Raymond Smullyan. Najdete v ní řadu logických hříček, paradoxů a hádanek, nejen z ostrova poctivců a lhářů. Stejnému tématu se věnuje i text *Poctivci, lháři a matematici* od Mirka Olšáka.

**4.** *Kolik uspořádaných čtveřic přirozených čísel* $(a, b, c, d)$ *se součtem* $100$ *splňuje rovnice*

$$(a+b)(c+d) = (b+c)(a+d) = (a+c)(b+d)?$$

(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro přirozená čísla $a$, $b$, $c$, $d$ platí $ab + bc + cd + da = 77$. Určete všechny možné hodnoty jejich součtu.

N2. Předpokládejme, že navzájem různá reálná čísla $a$, $b$, $c$, $d$ splňují nerovnosti

$$ab + cd > bc + ad > ac + bd.$$

Pokud $a$ je z těchto čtyř čísel největší, které z nich je nejmenší?

D1. Najděte všechny čtveřice $a > b > c > d$ celých čísel se součtem 71, která splňují rovnici

$$(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) = 26.$$

D2. Určete všechny možné hodnoty součtu $a + b + c + d$, kde $a$, $b$, $c$, $d$ jsou přirozená čísla splňující rovnost

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) + (b^2 - d^2)(c^2 - a^2) = 2021.$$

D3. Na každé stěně krychle je napsáno přirozené číslo. Ke každému vrcholu je připsán součin tří čísel na přilehlých stěnách. Součet osmi čísel při vrcholech je 1001. Určete všechny možné hodnoty součtu čísel na stěnách.

D4. Určete počet všech trojic přirozených čísel $a$, $b$, $c$, pro která platí $a + ab + abc + ac + c = 2017$.

**5.** *Na tabuli jsou napsána čísla* $1$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. *V každém kroku čísla* $a$, $b$, $c$ *napsaná na tabuli smažeme a nahradíme je součiny* $ab$, $bc$, $ca$. *Zjistěte, zda po několika krocích bude znovu některé z čísel napsaných na tabuli přirozené.* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Uvažujme přirozená čísla od 1 do 10 (včetně). Kolik nejvíce z nich můžeme mezi sebou vynásobit, aby druhá odmocnina z jejich součinu byla rovna přirozenému číslu?

N2. Nechť $n$ je přirozené číslo. Dokažte, že číslo $\sqrt{n}$ je celé, právě když v rozkladu čísla $n$ na prvočinitele má každé prvočíslo sudý počet výskytů.

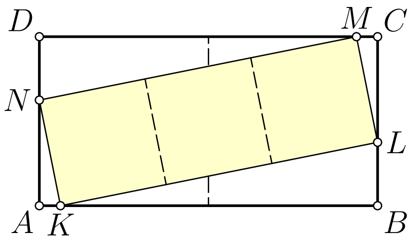
N3. a) Dokažte, že rovnost $a^2 = 2b^2$ neplatí pro žádná přirozená čísla $a$, $b$.
b) Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální, tj. že se nerovná žádnému zlomku $a/b$ s přirozenými čísly $a$, $b$.
c) Dokažte, že čísla $\sqrt{3}$ a $\sqrt{6}$ jsou iracionální.

D1. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n$ je číslo $\sqrt{n}$ buď celé, nebo iracionální.

D2. Přirozené číslo $n$ je takové, že číslo $6n^2 + 5n + 1$ je druhou mocninou přirozeného čísla. Dokažte, že také obě čísla $2n + 1$ a $3n + 1$ jsou druhými mocninami přirozených čísel.

D3. Na tabuli je napsáno $n$ různých přirozených čísel od 1 do $n$. V jednom kroku smažeme nějaká dvě čísla a místo nich napíšeme velikost (tj. absolutní hodnotu) jejich rozdílu. Pokračujeme tak dlouho, dokud na tabuli nezůstane jediné číslo. Pro která čísla $n$ bude toto poslední číslo liché nezávisle na tom, v jakém pořadí budeme čísla mazat?

**6.** *Je dán obdélník* $ABCD$, *kde* $|AB| : |BC| = 2 : 1$. *Na jeho stranách* $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ *jsou dány po řadě body* $K$, $L$, $M$, $N$ *tak, že* $KLMN$ *je obdélník, v němž* $|KL| : |LM| = 3 : 1$. *Vypočtěte poměr obsahů obdélníků* $ABCD$ *a* $KLMN$. (Josef Tkadlec)

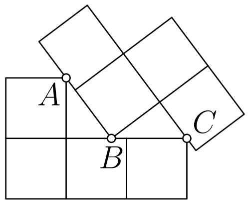



Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ve čtverci $ABCD$ zvolme uvnitř strany $AB$ libovolně bod $K$ a uvnitř strany $BC$ libovolně bod $L$. Na polopřímce $CD$ zvolme bod $M$ tak, aby $|\sphericalangle KLM| = 90°$. Dokažte, že trojúhelníky $BLK$ a $CML$ jsou podobné.

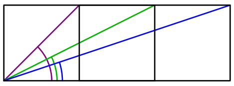
N2. Na stranách $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ čtverce $ABCD$ postupně zvolíme body $K$, $L$, $M$, $N$ tak, že $|AK| : |KB| = |BL| : |LC| = |CM| : |MD| = |DN| : |NA| = 2 : 1$. a) Dokažte, že $KLMN$ je čtverec. b) Určete poměr obsahů čtverců $KLMN$ a $ABCD$.

D1. Dvě tetrisové kostičky sestavené ze čtverců o rozměrech $1 \times 1$ se dotýkají v bodech $A$, $B$, $C$ jako na obrázku. Spočtěte $|AB|$.



D2. Označme $E$ střed základny $AB$ lichoběžníku $ABCD$, ve kterém $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Úhlopříčka $AC$ protíná úsečky $ED$, $BD$ postupně v bodech $F$, $G$. Určete postupný poměr $|AF| : |FG| : |GC|$.

D3. Na obrázku jsou vyznačeny úhly mezi úhlopříčkou a stranou ve třech pravoúhelnících $3 \times 1$, $2 \times 1$ a $1 \times 1$. Dokažte, že součet těchto tří úhlů je roven $90°$.



**Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.**

**1.** *Existuje deset po sobě jdoucích přirozených čísel, která jsou po řadě dělitelná čísly 9, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, 9?* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Petr napsal na tabuli 7 po sobě jdoucích přirozených čísel. Pavel je neviděl, avšak tvrdí, že jedno z nich je dělitelné sedmi. Má pravdu? Proč? [Pavel má pravdu. Označme $n$ nejmenší ze sedmi čísel a $z$ jeho zbytek při dělení sedmi. Pokud neplatí $z = 0$, je $1 \leqq 7 - z \leqq 6$, takže číslo $n + (7 - z)$ je napsáno na tabuli a je dělitelné sedmi, neboť je součtem čísel $n - z$ a 7, která jsou obě dělitelná sedmi.]

N2. Myslím si přirozené číslo. Pokud jej zmenším o 1, dostanu číslo dělitelné 3. Pokud myšlené číslo zmenším o 2, dostanu číslo dělitelné 4. a) Jaké nejmenší číslo si můžu myslet? b) Najděte všechna čísla, která si můžu myslet. [a) Číslo 10. Z čísel 4, 7, 10, 13, … vybereme nejmenší, které rovněž splňuje druhou podmínku. b) Číslo $10 + 12k$ pro libovolné nezáporné celé $k$. Každé číslo se ve srovnání s číslem 10 liší o násobek 3 (z první podmínky) a zároveň o násobek 4 (z druhé podmínky), tedy o násobek 12.]

N3. Blechy Adam a Bára skáčou po očíslovaných schodech stále nahoru. Adam začíná na 1. schodu a skáče o $a$ schodů. Blecha Bára začíná na 3. schodu a skáče o $b$ schodů. Schody, na které obě blechy doskočí, nazveme „dvakrát navštívené“. Určete nejmenší kladný rozdíl pořadových čísel dvakrát navštívených schodů, a to v případech a) $a = 4$ a $b = 5$, b) $a = 4$ a $b = 6$, c) $a = 6$ a $b = 9$. [a) 20, b) 12, c) takové schody neexistují. Hledaný rozdíl je obecně roven nejmenšímu společnému násobku čísel $a$ a $b$, pokud ovšem dvakrát navštívené schody vůbec existují. To je v případě c) vyloučeno, neboť celá čísla $k$, $l$ pro rovnici $1 + ka = 3 + lb$ tehdy neexistují – z čísel $1 + 6k$ a $3 + 9l$ je vždy pouze to druhé dělitelné třemi.]

D1. Rozmyslete si, proč z $n$ po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy právě jedno dělitelné číslem $n$. [Zbytky $n$ po sobě jdoucích přirozených čísel tvoří – podle zbytku $k$ nejmenšího z těchto čísel – v případě $k = 0$ $n$-tici $(0, 1, 2, \ldots, n - 1)$, v případě $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ $n$-tici $(k, k + 1, \ldots, n - 1, 0, 1, \ldots, k - 1)$.]

D2. Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde. [Jedná se o úlohu 71–C–I–1. Když její znění převedeme do jazyka čísel, z řešení úlohy N2 nám vyplyne, že počet žáků je tvaru $10+12k$. Díky rovnosti $10+12k = 6(1+2k)+4$ má zbytek takového čísla po dělení 6 potřebnou hodnotu 4.]

D3. Čtyři dny po sobě jsem zdolával stejné schodiště o méně než 100 schodech. Bral jsem ho první den po 2 schodech, druhý den po 3, třetí den po 4 a čtvrtý den po 5 schodech, na poslední krok mi zbyly po řadě 1, 2, 3 a 4 schody. Kolik schodů celé schodiště mělo? [59. Kdyby mělo schodiště o 1 schod více, byl by jejich počet dělitelný každým z čísel 2, 3, 4, 5.]

D4. Myslím si přirozené číslo, které je větší než 2000, menší než 3000 a je dělitelné 17. Pokud myšlené číslo zvětším o 1, dostanu číslo dělitelné 11. Pokud své číslo naopak zmenším o 1, dostanu číslo dělitelné 6. Jaké číslo si myslím? [Hledejme nejdříve nejmenší přirozené číslo $n$ s vlastnostmi $17 \mid n$, $11 \mid n+1$ a $6 \mid n-1$. Pracnějšímu postupu se vyhneme, když $6 \mid n-1$ zapíšeme jako $6 \mid n+17$ a přejdeme tak jen ke dvěma podmínkám $(17 \cdot 6) \mid n+17$ a $11 \mid n+1$. Protože $17 \cdot 6 = 102$, z první podmínky máme $n = 102k - 17$, tudíž hledáme nejmenší přirozené $k$, pro něž $11 \mid 102k-16$. To lze zjednodušit na $11 \mid 3k+6$ a dále ještě na $11 \mid k+2$, odkud $k = 9$ a $n = 102 \cdot 9 - 17 = 901$. Protože $17 \cdot 6 \cdot 11 = 1122$, všechna vyhovující $n$ jsou tvaru $901 + 1122l$. Proto je myšlené číslo $901 + 1122 = 2023$.]

**2.** *Pro střed $M$ přepony $AC$ pravoúhlého trojúhelníku $ABC$ platí $|BC| = |CM|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $ABC$ a $ABM$ mají stejné poloměry.*

(Michal Pecho)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechny rovnoramenné trojúhelníky, které mají aspoň jeden vnitřní úhel velikosti a) 30°, b) 60°. [a) Jsou to trojúhelníky s trojicemi vnitřních úhlů $(30°, 30°, 120°)$ a $(30°, 75°, 75°)$. b) Vyhovují jen rovnostranné trojúhelníky.]

N2. Bez užití Thaletovy věty dokažte, že střed kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku splývá se středem jeho přepony. Využijte k tomu vhodně dvě střední příčky. [Střed kružnice opsané obecnému trojúhelníku leží v průsečíku os jeho tří stran, k jeho určení stačí využít dvě z těchto os. Střední příčky pravoúhlého trojúhelníku, které jsou rovnoběžné s jeho odvěsnami, leží na osách těchto dvou stran. Proto tyto dvě osy procházejí společným bodem zmíněných dvou příček, tedy středem přepony.]

N3. Uvažme šest bodů: vrcholy daného rovnostranného trojúhelníku a středy jeho stran. Zjistěte, kolik pravoúhlých trojúhelníků má za vrcholy tři ze šesti uvažovaných bodů. [Šest. Jednou z odvěsen každého trojúhelníku musí být některá výška původního rovnostranného trojúhelníku.]

D1. V daném pravoúhlém trojúhelníku $ABC$ označme $K$ střed přepony $AB$ a $L$ střed kratší odvěsny $AC$. Kružnice s průměrem $BC$ protne úsečku $KL$ v bodě $P$. Dokažte, že úhly $PAC$ a $PBC$ jsou shodné. [72–C–S–2]

D2. Je dán trojúhelník $ABC$, v němž $D$, $E$ jsou po řadě středy jeho stran $BC$, $AB$. Nechť $F$ je střed úsečky $BE$ a $G$ vnitřní bod strany $AC$, pro nějž platí $|AG| = 3|CG|$. Dokažte, že průsečík přímek $DF$ a $GE$ leží na té rovnoběžce s přímkou $BC$, která prochází bodem $A$. [70–C–II–3, přečtěte si také poznámku 2 za řešením této úlohy.]

D3. Šestiúhelník, jehož všechny vnitřní úhly mají stejnou velikost, má čtyři po sobě jdoucí strany o délkách 1, 7, 4 a 2. Zjistěte délku zbývajících dvou stran. [5 a 6. Protože vnitřní úhly daného šestiúhelníku mají velikost $(6-2) \cdot 180°/6 = 120°$, lze jeho vrcholy umístit do uzlů rovinné sítě tvořené rovnostrannými trojúhelníky o straně délky 1.]

**3.** *Uvažujme* 20 *výroků:*

| | |
|---|---|
| *„Mám právě jednu sestru.“* | *„Mám právě jednoho bratra.“* |
| *„Mám právě dvě sestry.“* | *„Mám právě dva bratry.“* |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| *„Mám právě deset sester.“* | *„Mám právě deset bratrů.“* |

a) *Každý ze čtyř sourozenců pronesl jiný z těchto* 20 *výroků. Je možné, že všichni čtyři měli pravdu?*

b) *Najděte největší přirozené číslo $n$ takové, že každý z $n$ sourozenců může pronést jiný z těchto* 20 *výroků a mít pravdu.** (Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. V jedné rodině žije a) 7 bratrů bez sestry, b) 7 bratrů a 1 sestra. Každý z nich pronese jedno pravdivé prohlášení z nabídky v soutěžní úloze. Určete maximální počet různých výroků, které mohou zaznít. [a) 1, b) 3. V případě b) připadají v úvahu pouze 3 výroky: o právě 1 sestře, o právě 7 bratrech a o právě 6 bratrech.]

N2. Mějme $n$ navzájem různých přirozených čísel. Každé z nich obarvíme buď modře, nebo červeně. Zjistěte, pro jaké nejmenší $n$ už zaručeně najdeme dvě čísla stejné barvy, jejichž rozdíl je sudý.[$n = 5$. Rozdíl dvou čísel je sudý, právě když čísla mají stejnou paritu (sudé/liché). V případě $n \geqq 5$ najdeme podle Dirichletova principu alespoň 3 obarvená čísla stejné parity. Některá dvě z nich budou mít stejnou barvu. Pro $n = 4$ (a tím i vlastně pro $n < 4$) uvedeme protipříklad: za předpokladu, že máme zadána čísla od 1 do 4, obarvíme modře čísla 1, 2 a červeně čísla 3, 4.]

D1. Do pytle je naházeno 5 párů černých, 6 párů modrých a 7 párů šedých papučí, přitom páry papučí téže barvy jsou nerozlišitelné. Kolik papučí musíme vytáhnout, abychom určitě mezi nimi měli a) dvě papuče stejné barvy, b) dvě papuče stejné barvy, které tvoří pár? [a) 4, protože papuče jsou tří barev. b) 19. V pytli je celkem $5 + 6 + 7 = 18$ párů papučí. Vytáhneme-li 18 papučí a nebude-li ještě mezi nimi pár téže barvy, bude to znamenat, že jsme od každé barvy vytáhli buď pouze levé, nebo pouze pravé papuče, a tedy buď všechny levé, nebo všechny pravé papuče. Proto po vytažení 19. papuče se zaručeně jeden pár téže barvy zkompletuje.]

D2. Na Ostrově Logiky patří každý jeho obyvatel buď mezi poctivce, kteří říkají vždy pravdu, nebo mezi lháře, kteří vždycky lžou. U stolu se sejdou tři obyvatelé tohoto ostrova – Oliver, Pavel a Romana. Oliver řekne: „Mezi námi není ani jeden poctivec.“ Pavel dodá: „Mezi námi je právě jeden poctivec.“ Je Romana poctivec, nebo lhář? [Lhář. Uvažte nejprve, do které skupiny patří Oliver, pak do které Pavel.]

D3. Na Ostrov Logiky z úlohy D2 zavítá turista, který si najme místního průvodce. Při cestě uvidí v dáli dalšího domorodce. Turista za ním vyšle svého průvodce, aby se jej zeptal, zda je poctivcem, nebo lhářem. „Tvrdí, že je poctivec,“ přinese zprávu průvodce. Je průvodce poctivec, nebo lhář? [Poctivec. Uvažte, že každý obyvatel ostrova o sobě tvrdí, že je poctivec.]

* Všichni sourozenci mají stejné rodiče.

**4.** *Kolik uspořádaných čtveřic přirozených čísel* $(a, b, c, d)$ *se součtem* 100 *splňuje rovnice*

$$(a+b)(c+d) = (b+c)(a+d) = (a+c)(b+d)?$$

(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro přirozená čísla $a$, $b$, $c$, $d$ platí $ab + bc + cd + da = 77$. Určete všechny možné hodnoty jejich součtu. [Jediná hodnota 18. Platí $77 = ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d)$ a přitom $77 = 7 \cdot 11$. Oba činitelé $a + c$ a $b + d$ jsou větší než 1, takže jsou v nějakém pořadí rovny prvočíslům 7 a 11. Tak či onak platí $(a + c) + (b + d) = 18$. Zbývá uvést nějakou vyhovující čtveřici. Je jí například $(a, b, c, d) = (1, 1, 6, 10)$.]

N2. Předpokládejme, že navzájem různá reálná čísla $a$, $b$, $c$, $d$ splňují nerovnosti

$$ab + cd > bc + ad > ac + bd.$$

Pokud $a$ je z těchto čtyř čísel největší, které z nich je nejmenší? [Číslo $c$. První zadanou nerovnost upravte do tvaru $(a - c)(b - d) > 0$, druhou do tvaru $(b - a)(c - d) > 0$. Pokud je $a$ z daných čtyř čísel největší, platí $a - c > 0$ a $b - a < 0$, takže z odvozených nerovností plyne $b - d > 0$ a $c - d < 0$, neboli $b > d$ a $c < d$, celkově $a > b > d > c$.]

D1. Najděte všechny čtveřice $a > b > c > d$ celých čísel se součtem 71, která splňují rovnici

$$(a - b)(c - d) + (a - d)(b - c) = 26.$$

[Levou straně upravte na součin dvou mnohočlenů. Kompletní řešení: 71–C–S–3.]

D2. Určete všechny možné hodnoty součtu $a + b + c + d$, kde $a$, $b$, $c$, $d$ jsou přirozená čísla splňující rovnost

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) + (b^2 - d^2)(c^2 - a^2) = 2021.$$

[Levou stranu upravte na součin čtyř mnohočlenů. Kompletní řešení: 71–C–I–6.]

D3. Na každé stěně krychle je napsáno přirozené číslo. Ke každému vrcholu je připsán součin tří čísel na přilehlých stěnách. Součet osmi čísel při vrcholech je 1001. Určete všechny možné hodnoty součtu čísel na stěnách. [31. Jsou-li $a$, $b$ čísla na přední a zadní stěně, $c$, $d$ čísla na horní a dolní stěně a konečně $e$, $f$ čísla na levé a pravé stěně, pak roznásobením součinu $(a + b)(c + d)(e + f)$ dostaneme osm sčítanců, kterými jsou právě čísla připsaná vrcholům krychle (v každém vrcholu se stýkají tři stěny, po jedné z popsaných tří dvojic stěn). Podle zadání je tak součin tří čísel $a + b$, $c + d$ a $e + f$ větších než 1 roven číslu 1001, což je součin tří prvočísel 7, 11 a 13. Platí tedy $\{a + b, c + d, e + f\} = \{7, 11, 13\}$, takže $a + b + c + d + e + f = 7 + 11 + 13 = 31$.]

D4. Určete počet všech trojic přirozených čísel $a$, $b$, $c$, pro která platí $a + ab + abc + ac + c = 2017$. [K oběma stranám rovnice přičtěte číslo 1, abyste pak levou stranu mohli rozložit na součin dvou mnohočlenů. Kompletní řešení: 67–B–I–4.]

**5.** *Na tabuli jsou napsána čísla* $1$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. *V každém kroku čísla* $a$, $b$, $c$ *napsaná na tabuli smažeme a nahradíme je součiny* $ab$, $bc$, $ca$. *Zjistěte, zda po několika krocích bude znovu některé z čísel napsaných na tabuli přirozené.* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Uvažujme přirozená čísla od 1 do 10 (včetně). Kolik nejvíce z nich můžeme mezi sebou vynásobit, aby druhá odmocnina z jejich součinu byla rovna přirozenému číslu? [9. Prvočíslo 7 v součinu být nemůže, mělo by mezi jeho prvočiniteli jediný výskyt. Součin devíti ostatních čísel je roven $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, což je $(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5)^2$.]

N2. Nechť $n$ je přirozené číslo. Dokažte, že číslo $\sqrt{n}$ je celé, právě když v rozkladu čísla $n$ na prvočinitele má každé prvočíslo sudý počet výskytů. [Je-li kladné číslo $k = \sqrt{n}$ celé, z rovnosti $k^2 = n$ plyne, že počet výskytů každého prvočísla v rozkladu čísla $n$ je dvojnásobkem jeho výskytů v rozkladu čísla $k$, a tedy číslo sudé. Je-li naopak počet výskytů každého prvočísla v rozkladu čísla $n$ sudý, pak to celé číslo, které má ve svém rozkladu poloviční počty těchto výskytů, je zřejmě rovno $\sqrt{n}$.]

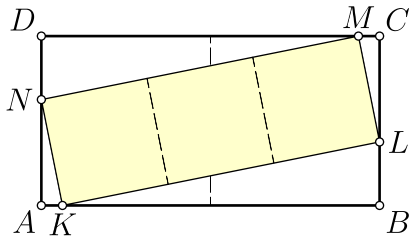
N3. a) Dokažte, že rovnost $a^2 = 2b^2$ neplatí pro žádná přirozená čísla $a$, $b$.
b) Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální, tj. že se nerovná žádnému zlomku $a/b$ s přirozenými čísly $a$, $b$.
c) Dokažte, že čísla $\sqrt{3}$ a $\sqrt{6}$ jsou iracionální.
[a) V rozkladu čísel $a^2$ a $2b^2$ na prvočinitele má prvočíslo 2 sudý, resp. lichý počet výskytů, takže $a^2 \neq 2b^2$. b) Z rovnosti $\sqrt{2} = a/b$ by vyplynula rovnost $a^2 = 2b^2$ z části a). c) Kdyby se zlomek $a/b$ rovnal jednomu z čísel $\sqrt{3}$ nebo $\sqrt{6}$, platilo by $a^2 = 3b^2$, resp. $a^2 = 6b^2$. Počet výskytů prvočísla 3 v rozkladu čísla $a^2$ je sudý, v rozkladu obou čísel $3b^2$ i $6b^2$ je lichý, tudíž $a^2 \neq 3b^2$ i $a^2 \neq 6b^2$.]

D1. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n$ je číslo $\sqrt{n}$ buď celé, nebo iracionální. [Stačí ukázat, že pokud číslo $\sqrt{n}$ není iracionální, tj. je rovno některému zlomku $a/b$ s přirozenými čísly $a$ a $b$, pak $\sqrt{n}$ je číslo celé. Skutečně, z rovnosti $\sqrt{n} = a/b$ upravené na $a^2 = nb^2$ plyne, že počet výskytů každého prvočísla v rozkladu čísla $n$ je sudý, neboť je rozdílem dvou sudých počtů jeho výskytů v rozkladech $a^2$ a $b^2$. Podle N2 to znamená, že $\sqrt{n}$ je celé číslo.]

D2. Přirozené číslo $n$ je takové, že číslo $6n^2 + 5n + 1$ je druhou mocninou přirozeného čísla. Dokažte, že také obě čísla $2n + 1$ a $3n + 1$ jsou druhými mocninami přirozených čísel. [Nechť $2n + 1 = a$, $3n + 1 = b$ a $6n^2 + 5n + 1 = c^2$, kde $a, b, c \in \mathbb{N}$. Povšimněme si, že čísla $a$, $b$ jsou nesoudělná (neboť je s nimi zřejmě nesoudělný jejich rozdíl $b - a = n$) a přitom platí $ab = c^2$. Odtud plyne: Každé prvočíslo dělící $a$ nebo $b$ dělí pouze jedno z nich a má v rozkladu tohoto čísla stejný počet výskytů jako v rozkladu čísla $c^2$, což je sudé číslo. Obě čísla $a$, $b$ tak jsou druhými mocninami. (Příklad existuje: $n = 40$, kdy $2n+1 = 9^2$ a $3n+1 = 11^2$.)]

D3. Na tabuli je napsáno $n$ různých přirozených čísel od 1 do $n$. V jednom kroku smažeme nějaká dvě čísla a místo nich napíšeme velikost (tj. absolutní hodnotu) jejich rozdílu. Pokračujeme tak dlouho, dokud na tabuli nezůstane jediné číslo. Pro která čísla $n$ bude toto poslední číslo liché nezávisle na tom, v jakém pořadí budeme čísla mazat? [Pro ta přirozená $n$, která po dělení čtyřmi dávají zbytek 1 nebo 2, tedy $n$ rovná 1, 2, 5, 6, 9, 10, atd. Sledujme, jak se změní aktuální počet $k$ lichých čísel napsaných na tabuli po následném kroku. Pokud při něm smažeme dvě lichá čísla, napíšeme místo nich číslo sudé, tudíž počet $k$ se zmenší o 2. Pokud smažeme jedno číslo sudé a druhé liché, napíšeme místo nich číslo liché, a tak se počet $k$ nezmění. Ke změně $k$ nedojde ani ve zbylém případě, kdy smažeme dvě sudá čísla, neboť místo nich napíšeme číslo sudé. Celkově vidíme, že po žádném kroku nezměníme paritu čísla $k$. Poslední číslo tudíž vyjde liché právě tehdy, když je úvodem na tabuli lichý počet lichých čísel (bez ohledu na postup mazání). Počet lichých čísel od 1 do $n$ je v případě $n = 4k$ roven $2k$, v případech $n = 4k + 1$ a $n = 4k + 2$ je roven $2k + 1$, konečně v případě $n = 4k + 3$ je roven $2k + 2$.]

**6.** *Je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| : |BC| = 2 : 1$. Na jeho stranách $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ jsou dány po řadě body $K$, $L$, $M$, $N$ tak, že $KLMN$ je obdélník, v němž $|KL| : |LM| = 3 : 1$. Vypočtěte poměr obsahů obdélníků $ABCD$ a $KLMN$.* (Josef Tkadlec)

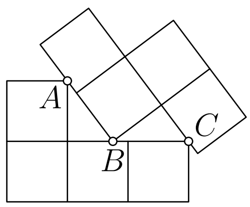



Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ve čtverci $ABCD$ zvolme uvnitř strany $AB$ libovolně bod $K$ a uvnitř strany $BC$ libovolně bod $L$. Na polopřímce $CD$ zvolme bod $M$ tak, aby $|\sphericalangle KLM| = 90°$. Dokažte, že trojúhelníky $BLK$ a $CML$ jsou podobné. [Ukažte, že oba trojúhelníky mají shodné vnitřní úhly.]

N2. Na stranách $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ čtverce $ABCD$ postupně zvolíme body $K$, $L$, $M$, $N$ tak, že $|AK| : |KB| = |BL| : |LC| = |CM| : |MD| = |DN| : |NA| = 2 : 1$. a) Dokažte, že $KLMN$ je čtverec. b) Určete poměr obsahů čtverců $KLMN$ a $ABCD$. [a) Podle zadání mají pravoúhlé trojúhelníky $AKN$, $BLK$, $CMN$ a $DNM$ shodné dvojice odvěsen, takže jsou shodné podle věty *sus*. Mají tedy shodné i přepony a dvojice ostrých vnitřních úhlů. Čtyřúhelník $KLMN$ tak má všechny strany shodné a všechny vnitřní úhly pravé – například rovnost $|\sphericalangle KLM| = 90°$ plyne z toho, že ostré úhly $BLK$ a $MLC$ se doplňují do 90°. b) 5 : 9. Nechť výhodně $|AB| = 3$. Pak $S_{ABCD} = 9$ a shodné pravoúhlé trojúhelníky $AKN$, $BLK$, $CMN$ a $DNM$ mají odvěsny délek 1 a 2. Obsah každého z nich je 1, tudíž $S_{KLMN} = 9 - 4 \cdot 1 = 5$.]

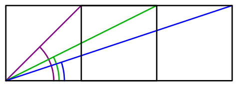
D1. Dvě tetrisové kostičky sestavené ze čtverců o rozměrech $1 \times 1$ se dotýkají v bodech $A$, $B$, $C$ jako na obrázku. Spočtěte $|AB|$.




[$|AB| = 5/4$. Na obrázku vidíme dva pravoúhlé trojúhelníky s přeponami $AB$ a $BC$, které mají jednu odvěsnu délky 1 a shodné k ní přilehlé vnitřní úhly. Tyto dva trojúhelníky jsou tudíž podle věty *usu* shodné. Označme $x$ délku jejich druhé odvěsny. Pak $|AB| = |BC| = 2 - x$ a Pythagorova věta dává rovnici $1^2 + x^2 = (2 - x)^2$, odkud $x = 3/4$, a proto $|AB| = 2 - x = 5/4$.]

D2. Označme $E$ střed základny $AB$ lichoběžníku $ABCD$, ve kterém $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Úhlopříčka $AC$ protíná úsečky $ED$, $BD$ postupně v bodech $F$, $G$. Určete postupný poměr $|AF| : |FG| : |GC|$. [12 : 3 : 5. Hledejte podobné trojúhelníky. Zdůvodněte, že $\triangle ABG \sim \triangle CDG$ a $\triangle AEF \sim \triangle CDF$. Z první podobnosti plyne $|AG| : |CG| = 3 : 1$, ze druhé $|AF| : |FC| = 3 : 2$. Zbytek je „trocha počítání“. Kompletní řešení: 64–C–I–4.]

D3. Na obrázku jsou vyznačeny úhly mezi úhlopříčkou a stranou ve třech pravoúhelnících $3 \times 1$, $2 \times 1$ a $1 \times 1$. Dokažte, že součet těchto tří úhlů je roven $90°$.



[Trikově zobrazíme vykreslenou úhlopříčku obdélníku $3 \times 1$ podle osy dané jeho „dolní“ stranou délky 3. Zdůvodněte, že tato nová úsečka je přeponou pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku, jehož jedna z odvěsen je vykreslená úhlopříčka obdélníku $2 \times 1$. Zjistíme tak, že součet dvou ze tří zadaných úhlů je $45°$.]