

Vyřešené zadání pro didaktický test z matematiky rozšiřující - jaro 2025

Zadání didaktického testu z matematiky 2025 ROZŠIŘUJÍCÍ jaro

Zadání úlohy 1

1 bod

1 Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ je dán výraz:

$$V(x) = x^2 - 9 \cdot x^{-2}$$

Určete všechny hodnoty x , pro které je hodnota daného výrazu rovna nule.

Řešení úlohy 1

1)

$$x^2 - 9x^{-2} = 0$$

$$x^2 - \frac{9}{x^2} = 0$$

Pro $x \neq 0$:

$$x^2 - \frac{9}{x^2} = 0 \quad / \cdot x^2$$

$$x^4 - 9 = 0$$

$$(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$$

Uvedený součin je roven nule, pokud se první ze závorek rovná nule (druhou vynulovat v reálných číslech nelze):

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Zadání úlohy 2

max. 2 body

2 Je dáno komplexní číslo z :

$$z = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{9} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{9} \right)$$

Vypočtěte $\frac{1}{z^3}$ a výsledek uveďte v algebraickém tvaru.

Řešení úlohy 2

2)

Ve jmenovateli využijeme nejprve Moivreovu větu, dále upravíme jmenovatel a zlomek rozříšíme. Nakonec zlomek usměrníme a převedeme ho na algebraický tvar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{9} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{9} \right) \right)^3} &= \frac{1}{\frac{1}{8} \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{3} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \frac{1}{-\frac{1}{16} - \frac{i \cdot \sqrt{3}}{16}} \cdot \frac{16}{16} = \\ &= \frac{16}{-1 - i \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{-1 + i \cdot \sqrt{3}}{-1 + i \cdot \sqrt{3}} = \frac{-16 + 16i \cdot \sqrt{3}}{4} = -4 + 4\sqrt{3} \cdot i \end{aligned}$$

Zadání úlohy 3

max. 2 body

3 V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici:

$$\frac{x^2 + x}{x - 1} \leq x - 8$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení úlohy 3

3)

$$\frac{x^2 + x}{x - 1} \leq x - 8$$

$$\frac{x^2 + x}{x - 1} - x + 8 \leq 0$$

$$\frac{x^2 + x - x \cdot (x - 1) + 8 \cdot (x - 1)}{x - 1} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + x - x^2 + x + 8x - 8}{x - 1} \leq 0$$

$$\frac{10x - 8}{x - 1} \leq 0$$

Nulové body $x = 1$ a $x = 0,8$

$x \in (-\infty; 0,8)$	$x \in (0,8; 1)$	$x \in (1; \infty)$
Doadíme např. $x = 0$ $\frac{-8}{-1} = 8 \quad (\geq 0)$ Nerovnice na tomto intervalu nemá řešení.	Doadíme např. $x = 0,9$ $\frac{1}{-0,1} = -10 \quad (\leq 0)$ Tento interval je součástí řešení.	Doadíme např. $x = 2$ $\frac{12}{1} = 12 \quad (\geq 0)$ Nerovnice na tomto intervalu nemá řešení.

Nulový bod $x = 1$ do řešení nepatří (nulový jmenovatel). Druhý nulový bod do řešení zařadíme, protože levá strana může být rovna nule.

$$x \in (0,8; 1)$$

Zadání úlohy 4

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

V balíčku 20 karet je právě jedno eso.

Z balíčku si náhodně vytáhne 3 karty nejprve první hráč, po něm si ze zbývajících karet náhodně vytáhne 3 karty druhý hráč a nakonec i třetí hráč.

(CZVV)

max. 2 body

4 Vypočtěte pravděpodobnost jevu:

4.1 První hráč získá eso.

4.2 Až přijde na řadu třetí hráč, eso bude ještě stále mezi 14 zbývajících kartami v balíčku.

Výsledky nezaokrouhľujte.

Řešení úlohy 4

4)

4.1)

Požadovanou pravděpodobnost můžeme spočítat pomocí opačného jevu – že si první hráč eso nevytáhne.

Jmenovatel zlomku, pomocí kterého spočítáme tuto pravděpodobnost je počet všech možných trojic v 20 kartách. Čítec je počet všech možných trojic v 19 kartách (20. karta bude eso).

$$p = 1 - \frac{\binom{19}{3}}{\binom{20}{3}} = 1 - \frac{\frac{19!}{3! \cdot 16!}}{\frac{20!}{3! \cdot 17!}} = \frac{3}{20} = 0,15$$

Pravděpodobnost, že si první hráč vytáhne eso je 15 %.

4.2)

Budeme počítat pravděpodobnost, že první ani druhý hráč si nevytáhl eso.

Pravděpodobnost, že první hráč nemá eso je 0,85. Dále spočítáme pravděpodobnost, že druhý hráč nemá eso. Zde můžeme počítat podobně jako v předchozí podotázce, se změnou, že se jedná o 17 karet – druhý hráč tak musí vytáhnout trojici z 16 karet (17. je eso).

$$\frac{\binom{16}{3}}{\binom{17}{3}} = \frac{\frac{16!}{3! \cdot 13!}}{\frac{17!}{3! \cdot 14!}} = \frac{14}{17}$$

Jevy, že první hráč nevytáhl eso, ani druhý hráč si nevytáhl eso musí platit zároveň:

$$0,85 \cdot \frac{14}{17} = 0,7$$

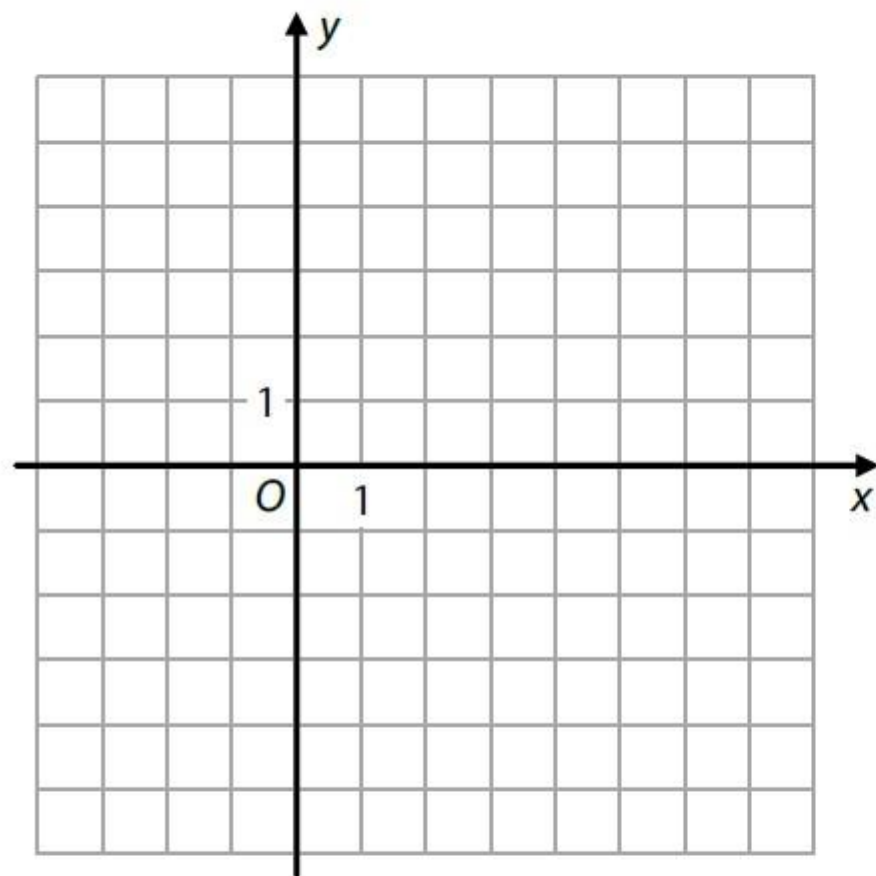
Pravděpodobnost, že si první hráč, ani druhý hráč nevytáhl eso je 0,7. Tímto způsobem zbyde eso na třetího hráče.

Zadání úlohy 5

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Lineární lomená funkce f je definována pro všechna $x \in \mathbf{R} \setminus \{4\}$.

Přitom platí: $f(3) = 1, f(5) = -3$.



(CZVV)

max. 3 body

5

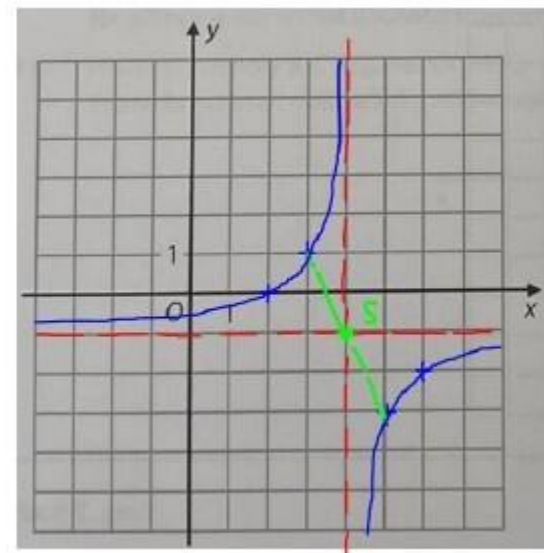
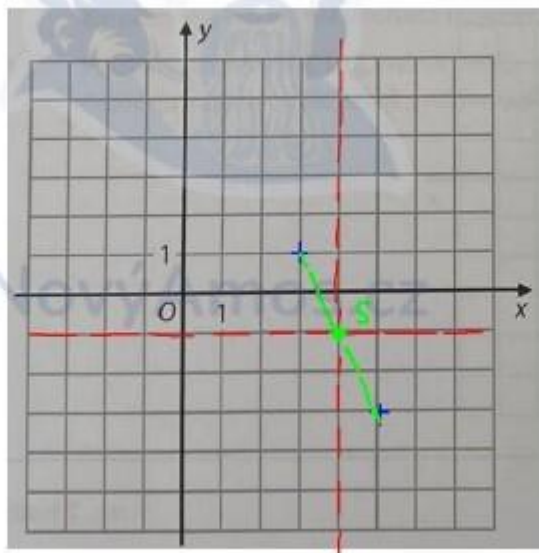
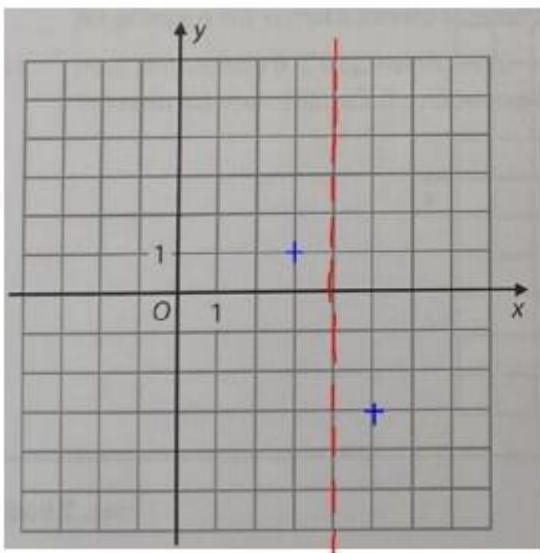
5.1 Vlastní graf soustavy souřadnic O konstruujte graf funkce f .

Řešení úlohy 5

5)

5.1)

Začneme s nákresem vertikální asymptoty, která je dána podmínkou v zadání a zakreslíme dva uvedené body (první obrázek). Z obrázku usoudíme, že tyto dva body se musí nacházet na dvou odlišných větvích hyperboly. Pro tyto hledané větve platí středová souměrnost a protože vidíme, že body jsou ve vzdálenosti 1 od vertikální asymptoty, jedná se o dva body ve středové souměrnosti, takto najdeme střed hyperboly a také její horizontální asymptotu (druhý obrázek). Kromě středové souměrnosti je hyperbola také osově souměrná, snadno tak dohledám její tvar (třetí obrázek, hledaná funkce modrou barvou).



5.2)

Z pomoci odvození v předchozí podotázce, víme, že hledaná funkce musí být ve tvaru:

$$y = \frac{-a}{x-4} - 1$$

Neznámou hodnotu a dopočítáme dosazením jedné z uvedených funkčních hodnot:

$$1 = \frac{-a}{3-4} - 1$$

$$1 = a - 1$$

$$a = 2$$

$$f: y = \frac{-2}{x-4} - 1$$

S případnou úpravou:

$$f: y = \frac{2-x}{x-4}$$

Zadání úlohy 6

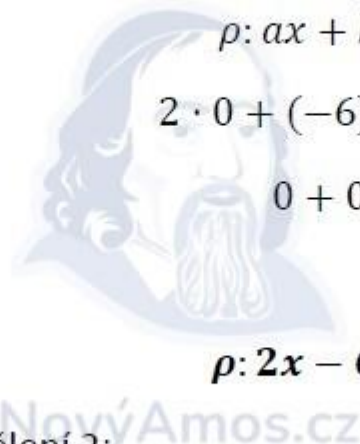
max. 2 body

- 6** V kartézské soustavě souřadnic $Oxyz$ je rovina ϱ určena normálovým vektorem $\vec{n}_\varrho = (2; -6; 2)$ a bodem $X[0; 0; 1]$.
- 6.1 Sestavte obecnou rovnici roviny ϱ .
- 6.2 V rovině σ leží souřadnicové osy y a z .
Zapište libovolný směrový vektor $\vec{u}$ průsečnice rovin ϱ a σ .

Řešení úlohy 6

6)

6.1)


$$\rho: ax + by + cz + d = 0$$

$$2 \cdot 0 + (-6) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + d = 0$$

$$0 + 0 + 2 + d = 0$$

$$d = -2$$

$$\rho: 2x - 6y + 2z - 2 = 0$$

Nebo případná úpravou po vydělení 2:

$$\rho: x - 3y + z - 1 = 0$$

6.2)

Normálový vektor roviny σ je osa x , tedy $\vec{n}_\sigma = (1; 0; 0)$ a libovolný bod, jehož souřadnice x je nulová, např. bod $A[0,1,1]$.

$$\sigma: ax + by + cz + d = 0$$

$$1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + d = 0$$

$$d = 0$$

$$\sigma: x = 0$$

Hledáme vektor, který musí být zároveň kolmý na $\vec{n}_\rho$ a $\vec{n}_\sigma$.

Určíme vektorový součin:

$$\vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma = (2; -6; 2) \times (1; 0; 0) = (-6 \cdot 0 - 2 \cdot 0; 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0; 2 \cdot 0 - (-6) \cdot 1) = (0; 2; 6)$$

Možnou odpovědí je i jakýkoliv jeho reálný násobek.

$$\vec{s} = (0; 2; 6)$$

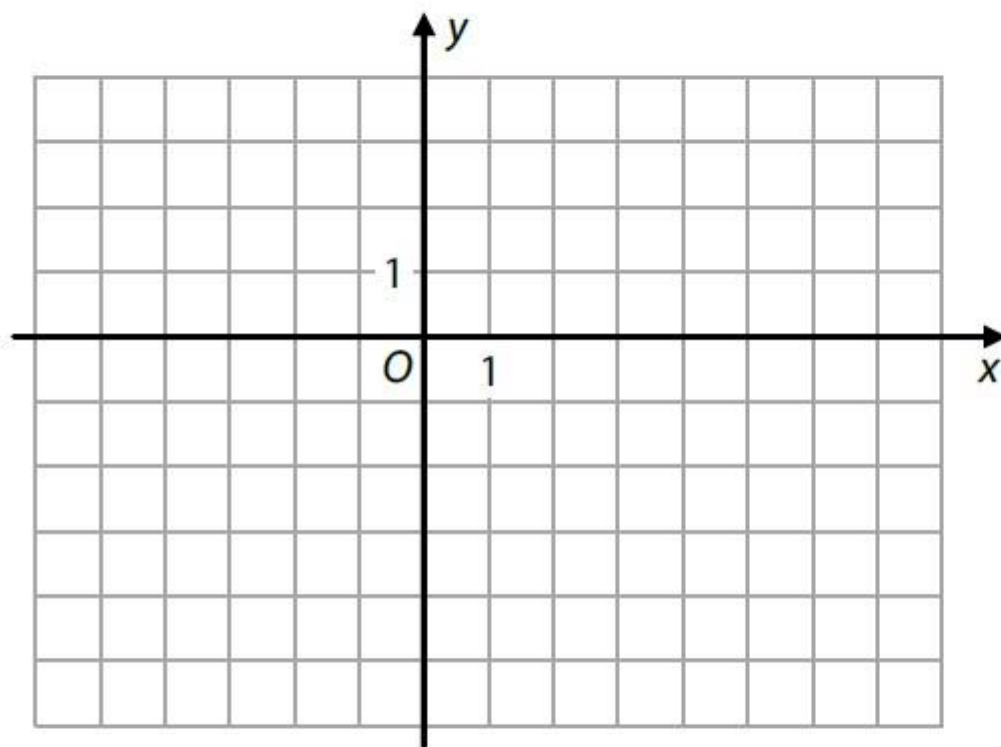
Nebo například:

$$\vec{s} = (0; 1; 3)$$

Zadání úlohy 7

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Kružnice m se středem $M[-4; 2]$ se v bodě $T[6; t_2]$ dotýká kružnice k se středem $K[2; -1]$. Bodem T prochází společná tečna t kružnic m a k .



(CZVV)

max. 2 body

7 Sestavte

7.1 středovou rovnici kružnice k ,

7.2 obecnou rovnici společné tečny t .

Řešení úlohy 7

7)

7.1)

Body M, T, K leží na přímce. Určíme o jakou přímku se jedná pomocí bodů M, K :

$$\overrightarrow{MK} = K - M = (6; -3)$$

$$\overrightarrow{n_{MK}} = (3; 6)$$

$$ax + by + c = 0$$

Dosadíme bod M a odvozený normálový vektor:

$$3 \cdot (-4) + 6 \cdot 2 + c = 0$$

$$-12 + 12 + c = 0$$

$$c = 0$$

$$3x + 6y = 0 \quad /:3$$

$$\boxed{x + 2y = 0}$$

Na této přímce tedy leží středy obou kružnic a uvedený bod dotyku T – chybějící souřadnici můžeme dopočítat:

$$6 + 2y = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow T[6; -3]$$

Poloměr kružnice k je dán vzdáleností bodů T a K .

$$r = |\overrightarrow{TK}| = \sqrt{(2 - 6)^2 + (-1 - (-3))^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

7.2)

Rovnice přímky, která je v rámečku v předchozí podotázce je kolmá na hledanou tečnu. Určíme tedy rovnici přímky, která je na tuto kolmá a prochází bodem dotyku:

$$\vec{n}_1 = (1,2) \rightarrow \vec{n}_2 = (-2,1)$$

$$ax + by + c = 0$$

$$-2 \cdot 6 + 1 \cdot (-3) + c = 0$$

$$-12 - 3 + c = 0$$

$$-15 + c = 0$$

$$c = 15$$

$$t: -2x + y + 15 = 0$$

NovýAmos.cz

Případně:

$$t: 2x - y - 15 = 0$$

Zadání úlohy 8

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V rovině leží body A , S a přímka q .

A
x

S
x

q

(CZVV)

max. 3 body

8.2 V obrázku sestrojte chybějící vrcholy trojúhelníku ABC a trojúhelník narýsujte. Najděte všechna řešení.

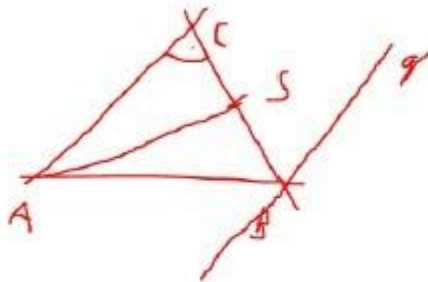
V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení úlohy 8

8)

8.1)

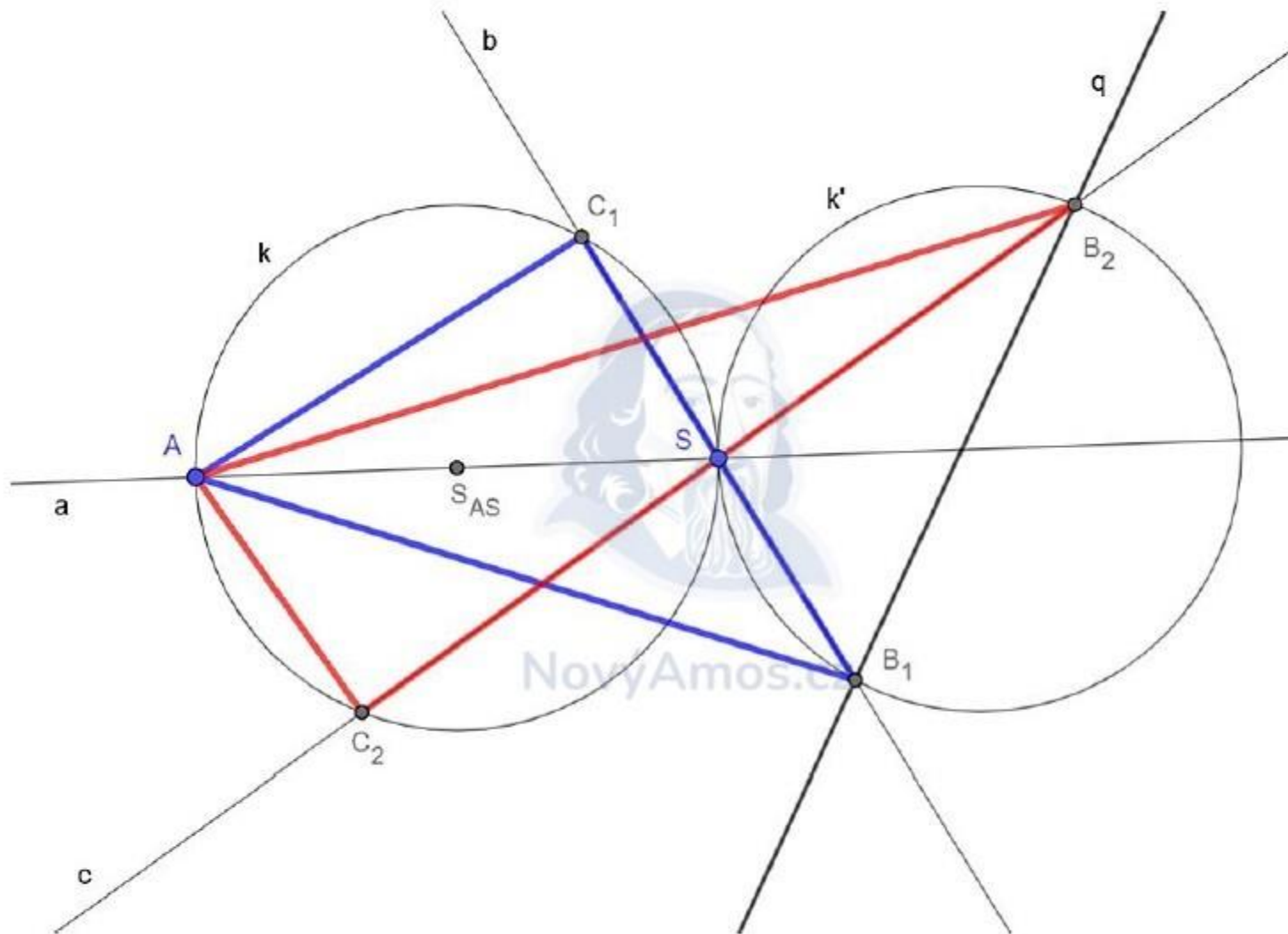
Náčrtek:



Využijeme faktu, že trojúhelník ASC je pravoúhlý, začneme tedy Thaletovou větou. Množina všech bodů, kde může být bod B je poté také určena kružnicí – ve středové souměrnosti s Thaletovou kružnicí.

- 1) $a, a = AS$
- 2) S_{AS}, S_{AS} je střed úsečky AS
- 3) $k, (S_{AS}, r = |AS_{AS}|)$
- 4) k', k' ve středové souměrnosti s k podle středu S
- 5) $B, B = k' \cap q \rightarrow B_1, B_2$
- 6) $b, b = B_1S$
- 7) $c, c = B_2S$
- 8) $C, C \in k \cap b \wedge C \neq S$

8.2)



Zadání úlohy 9

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 9

Zmenšený čtvercový plakát má o 64 % menší obsah než velký čtvercový plakát.
Přitom úhlopříčka zmenšeného plakátu je o 4 dm kratší než úhlopříčka velkého plakátu.

(CZVV)

max. 2 body

9 Vypočtěte, o kolik dm^2 se liší obsahy velkého a zmenšeného plakátu.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení úlohy 9

9)

Označme stranu malého plakátu v decimetrech a , potom pro jeho úhlopříčku u_1 a jeho obsah S_1 platí:

$$u_1^2 = a^2 + a^2$$

$$u_1 = \sqrt{2a^2} = a \cdot \sqrt{2}$$

$$S_1 = a^2$$

U velkého plakátu pro jeho úhlopříčku u_2 a jeho obsah S_2 platí:

$$u_2 = 4 + a \cdot \sqrt{2}$$

$$S_1 = (1 - 0,64) \cdot S_2 = 0,36 \cdot S_2$$

$$S_2 = \frac{1}{0,36} S_1 = \frac{100}{36} S_1 = \frac{25}{9} \cdot S_1$$

Pro libovolný čtverec platí, že je možné spočítat jeho obsah pomocí jeho úhlopříčky:

$$S = \frac{u^2}{2}$$

Potom S_2 můžeme vyjádřit dvojím způsobem – tyto možnosti zapíšeme do rovnosti a dále upravujeme a počítáme vzniklou rovnicí:

$$\frac{u_2^2}{2} = \frac{25}{9} \cdot S_1$$

$$\frac{(4 + a \cdot \sqrt{2})^2}{2} = \frac{25}{9} \cdot a^2$$

$$\frac{16 + 8\sqrt{2}a + 2a^2}{2} = \frac{25a^2}{9}$$

$$9 \cdot (16 + 8\sqrt{2}a + 2a^2) = 50a^2$$

$$144 + 72\sqrt{2}a + 18a^2 = 50a^2$$

$$32a^2 - 72\sqrt{2}a - 144 = 0 \quad /:8$$

$$4a^2 - 9\sqrt{2}a - 18 = 0$$

$$D = 162 + 288 = 450$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{450} = \sqrt{2 \cdot 225} = 15\sqrt{2}$$

$$a_{1,2} = \frac{9\sqrt{2} \pm 15\sqrt{2}}{8}$$

$$a_1 = 3\sqrt{2}, \quad a_2 = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

Smysl má řešit pouze kladnou délku strany plakátu, tedy $a = 3\sqrt{2}$. Pak platí:

$$S_1 = a^2 = 18 \text{ dm}^2$$

Zadání úlohy 10

max. 3 body

10 Je dána rovnice:

$$\frac{-1 + 2 \cdot \log_{16} x}{\log_{16}(x - 3)} = 1$$

10.1 Určete množinu všech $x \in \mathbf{R}$, pro která má daná rovnice smysl.

10.2 V oboru $\mathbf{R}$ rovnici vyřešte.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

Řešení úlohy 10

10)

10.1)

$$\frac{-1 + 2 \cdot \log_{16} x}{\log_{16}(x - 3)} = 1$$

Musí platit následující podmínky:

$$x > 0 \wedge x - 3 > 0 \wedge \log_{16}(x - 3) \neq 0$$

První podmínka je automaticky splněná, je-li splněná druhá z podmínek (po úpravě čísla větší než 3).

$$\log_{16}(x - 3) \neq 0 \rightarrow 16^0 \neq x - 3$$

$$1 \neq x - 3$$

$$x \neq 4$$

Jedná se tedy o čísla větší než 3, kromě čísla 4:

$$x \in (3; 4) \cup (4; \infty)$$

10.2)

$$\frac{-1 + 2 \cdot \log_{16} x}{\log_{16}(x - 3)} = 1$$

$$-1 + 2 \cdot \log_{16} x = \log_{16}(x - 3)$$

$$2 \cdot \log_{16} x - \log_{16}(x - 3) = 1$$

$$\log_{16} x^2 - \log_{16}(x - 3) = 1$$

$$\log_{16} \frac{x^2}{x - 3} = 1$$

$$16^1 = \frac{x^2}{x - 3} \quad / \cdot (x - 3)$$

$$16x - 48 = x^2$$

$$x^2 - 16x + 48 = 0$$

Můžeme řešit vzorcem pro kvadratickou rovnici nebo rozkladem ($48 = 4 \cdot 12$).

$$(x - 4)(x - 12) = 0$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 12$$

Pomocí podmínek odvozených v předchozí podotázce vyřadíme x_1 .

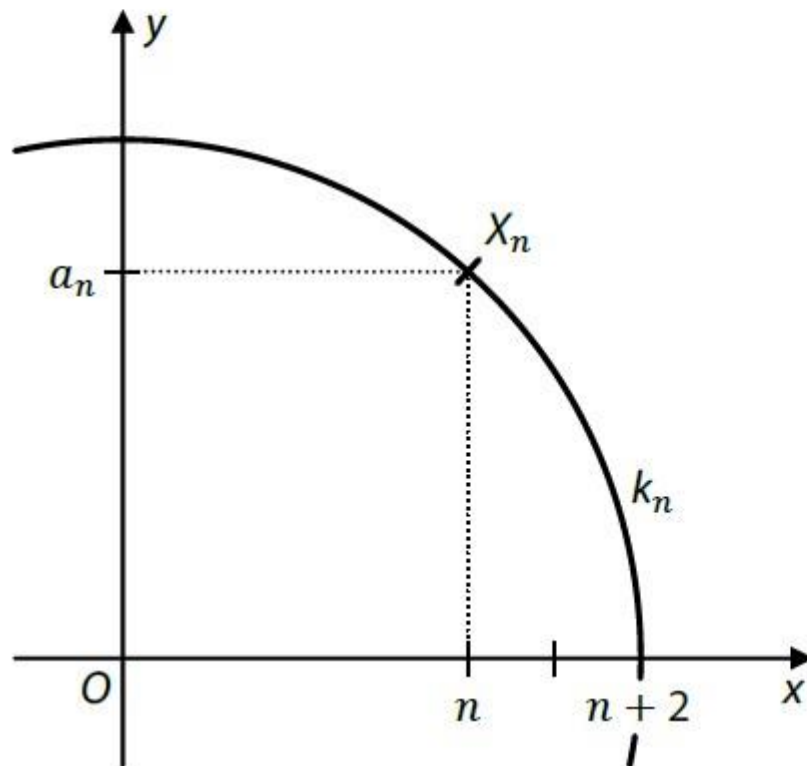
$$x = 12$$

Zadání úlohy 11

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

V kartézské soustavě souřadnic Oxy leží každý z bodů $X_n[n; a_n]$, kde $n \in \mathbf{N}$, $a_n > 0$, na příslušné kružnici k_n se středem v počátku O a poloměrem $r_n = n + 2$.

Souřadnice a_n jednotlivých bodů X_n jsou po řadě členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.



(CZVV)

max. 3 body

11

11.1 Vyjádřete posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vzorcem pro n -tý člen.

Řešení úlohy 11

11)

11.1)

Jedná se vždy o kružnici o zadaném poloměru $n + 2$ a středu $[0; 0]$, tedy:

$$x^2 + y^2 = (n + 2)^2$$

Dosadíme obecný bod $[n; a_n]$ a vyjádříme a_n .

$$n^2 + a_n^2 = (n + 2)^2$$

$$n^2 + a_n^2 = n^2 + 4n + 4$$

$$a_n^2 = 4n + 4$$

Víme, že $a_n > 0$, tedy:

$$a_n = \sqrt{4n + 4}$$

Případně:

$$a_n = \sqrt{4 \cdot (n + 1)} = 2\sqrt{n + 1}$$

11.2)

O výrazu pro n -tý člen, který je odvozený výše, víme, že n je přirozené. Vypočítáme následující nerovnici

$$\sqrt{4n + 4} < 100$$

Odmocnina je rostoucí funkce, pro výraz pod odmocninou tak musí platit následující úprava:

$$4n + 4 < 100^2$$

$$4n < 100^2 - 4$$

$$4n < 9\,996$$

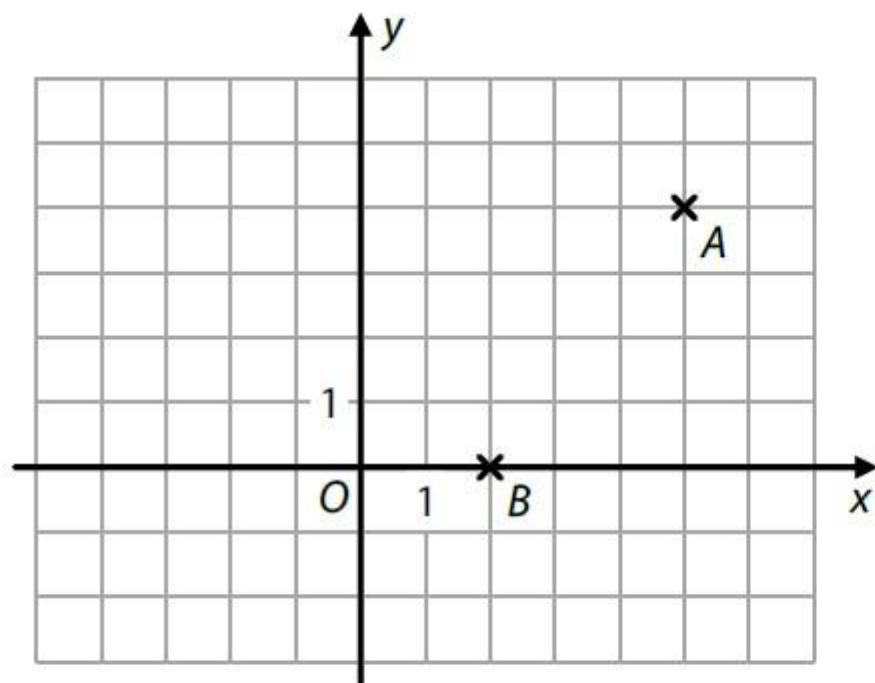
$$n < 2\,499$$

Jedná se o 2 498 členů posloupnosti.

Zadání úlohy 12

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 12

V kartézské soustavě souřadnic Oxy jsou dány body $A[5; 4]$ a $B[2; 0]$.



(CZVV)

max. 3 body

- 12** Každou z následujících množin lze zobrazit v kartézské soustavě souřadnic Oxy . (Všechny tyto množiny obsahují bod A .)

Přiřadte ke každé množině (12.1–12.3) odpovídající geometrický útvar (A–F).

- 12.1 $\{M; |Mx| : |My| = 4 : 5\}$, _____
tj. množina všech bodů M , jejichž vzdálenost od souřadnicové osy x a vzdálenost od souřadnicové osy y jsou v poměru $4 : 5$.
- 12.2 $\{M; |Mx| : |MB| = 4 : 5\}$, _____
tj. množina všech bodů M , jejichž vzdálenost od souřadnicové osy x a vzdálenost od daného bodu B jsou v poměru $4 : 5$.
- 12.3 $\{M; |My| : |MB| = 1 : 1\}$, _____
tj. množina všech bodů M , jejichž vzdálenost od souřadnicové osy y a vzdálenost od daného bodu B jsou v poměru $1 : 1$.

- A) parabola s vrcholem $V[1; 0]$
B) parabola s vrcholem $V[2; -2]$
C) hyperbola se středem v bodě B
D) hyperbola se středem v počátku O
E) dvojice různoběžek, které procházejí bodem B , bez jejich průsečíku
F) dvojice různoběžek, které procházejí počátkem O , bez jejich průsečíku

Řešení úlohy 12

12.1)

Množina bodů musí procházet bodem A . Z uvedeného poměru také známe předpis:

$$\frac{|x|}{|y|} = \frac{4}{5} \quad (y \neq 0)$$

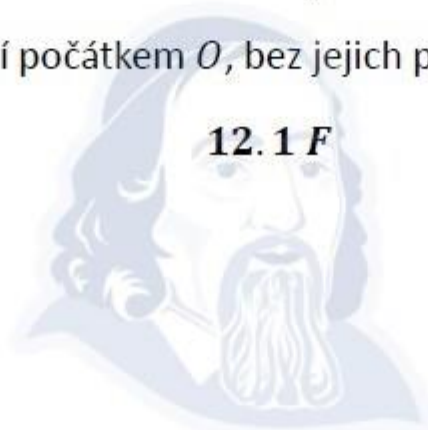
$$5|x| = 4|y|$$

Při různých kombinacích kladných a záporných hodnot, získáme dva možné tvary:

$$y = \pm \frac{5}{4}x$$

Jedná se o dvojici různoběžek procházející počátkem O , bez jejich průsečíku (z podmínky)

12.1 F



12.2)

Pro libovolný bod na přímce AB platí, že jeho vzdálenost od bodu B i od osy x může být $4 : 5$. Při volbě jiných bodů na přímce pracujeme s odlišnými trojúhelníky, které jsou vzájemně podobné. Toto funguje také pro druhou přímku v osově souměrnosti. Jedná se teda také o dvě různoběžky procházející bodem B , bez jejich průsečíku.

12.2 E

12.3)

Zadání úlohy 13

max. 3 body

13 Přiradte ke každé limitě posloupnosti (13.1–13.3) odpovídající výsledek (A–F).

13.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n \cdot n!}{(1 + n)!}$$

13.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+2}}{3^n \cdot 2^{n+2}}$$

13.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{15}{4} - \frac{15}{16} + \frac{15}{64} - \frac{15}{256} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{15}{4^n} \right)$$

A) 1

B) 3

C) 5

D) 7

E) 9

F) žádná z uvedených

Řešení úlohy 13

13)

13.1)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n \cdot n!}{(1 + n)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n \cdot n!}{(1 + n) \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!} + \frac{n \cdot n!}{n!}}{(1 + n) \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!} + n}{1 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n! \cdot n} + \frac{n}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{n}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n! \cdot n} + 1}{\frac{1}{n} + 1} = \frac{0 + 1}{0 + 1} = 1\end{aligned}$$

13.1 A

13.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+2}}{3^n \cdot 2^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n \cdot 6^2}{3^n \cdot 2^n \cdot 2^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n \cdot 36}{6^n \cdot 4} = 9$$

13.2 E

13.3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{15}{4} - \frac{15}{16} + \frac{15}{64} - \frac{15}{256} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{15}{4^n} \right) =$$

Jedná se o součet nekonečné konvergující geometrické řady, kde $a_1 = \frac{15}{4}$ a $q = -\frac{1}{4}$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{15}{4}}{1 + \frac{1}{4}} \cdot \frac{4}{4} = \frac{15}{4 + 1} = 3$$

Zadání úlohy 14

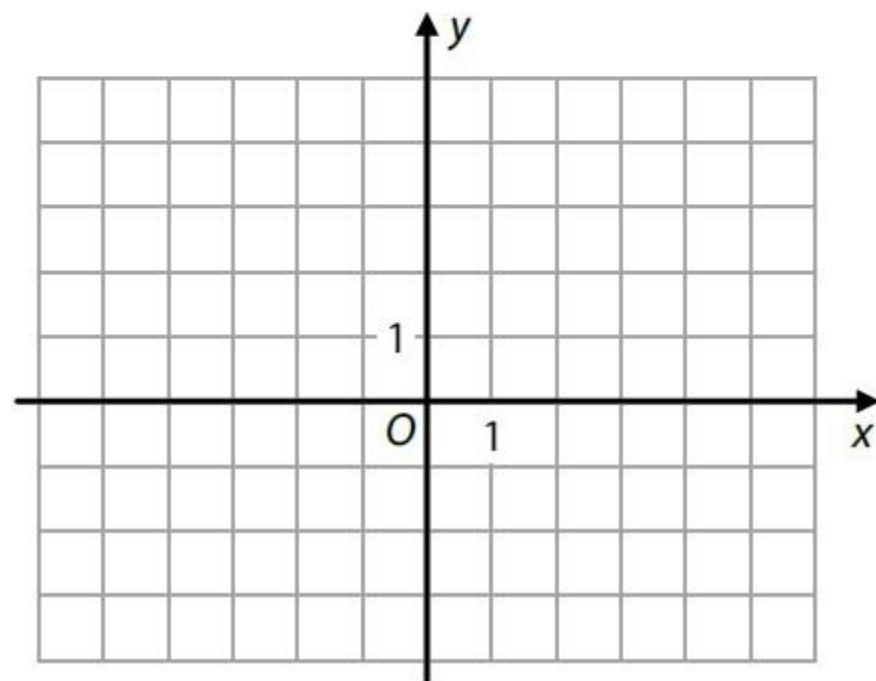
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14

Následující tři funkce jsou definovány pro všechny přípustné hodnoty $x \in \mathbf{R}$.

$$f: y = 2 \cdot \log_2 x$$

$$g: y = x^2 + 1$$

$$h: y = \frac{1}{x-2}$$



(CZVV)

2 body

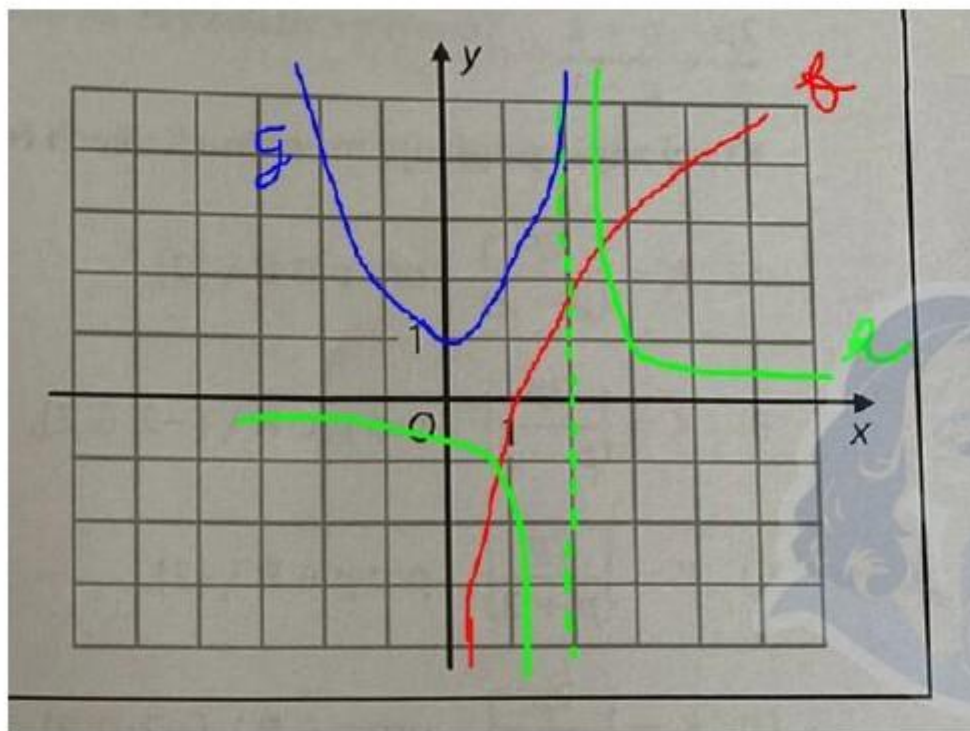
14 Které tvrzení je nepravdivé?

- A) Funkce h není v žádném intervalu rostoucí.
- B) Grafy funkcí f a h se protínají ve dvou bodech.
- C) Existuje bod $x \in \mathbf{R}$, v němž má funkce g minimum.
- D) Grafy funkcí f a g mají pouze jeden společný bod.

Řešení úlohy 14

14)

Náčrtek funkcí:



A) Funkce h je lineární lomená funkce. Ta je kromě jednoho bodu pouze rostoucí nebo pouze klesající. Tato funkce bude mít vertikální asymptotu v bodě $x = 2$. Spočítáme hodnoty dvou bodů, které se nacházejí na stejné větvi hyperboly:

$$h(0) = \frac{1}{0 - 2} = -\frac{1}{2}$$

$$h(1) = \frac{1}{1 - 2} = -1$$

Hodnota se zmenšila pro větší vstupní hodnotu. Funkce je klesající – lze si ověřit i na náčrtku výše. Tvrzení je pravdivé.

B) Z náčrtku výše vidíme, že se funkce f a h protínají ve dvou bodech. Tvrzení je pravdivé.

C) Jedná se o kvadratickou funkci – zde konkrétně tato má minimum ve svém vrcholu. Tvrzení je pravdivé.

D) Grafy funkcí f a g se neprotínají – viz náčrtek. Tvrzení je nepravdivé.

E) Osa x je horizontální asymptotou této funkce, tudíž je tvrzení pravdivé.

14 D

Zadání úlohy 15

2 body

15 Je dán výraz:

$$\frac{\cotg 4x}{\sqrt{1 - \sin^2 4x}}$$

Která množina je definičním oborem daného výrazu?

A) $\mathbf{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{8}; k \in \mathbf{Z} \right\}$

B) $\mathbf{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{4}; k \in \mathbf{Z} \right\}$

C) $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbf{Z} \right\}$

D) $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}$

E) $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}; k \in \mathbf{Z} \right\}$

Řešení úlohy 15

15)

$$\frac{\cotg 4x}{\sqrt{1 - \sin^2 4x}}$$

Funkce kotangens je definovaná pro každou reálnou vstupní hodnotu kromě případů $x \neq 0 + k \cdot \pi; k \in \mathbf{Z}$.

Potom platí:

$$4x \neq k\pi \rightarrow x \neq \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbf{Z}.$$

Zaměříme, se nyní na jmenovatel, zde je sinus, který je obecně definovaný pro každou reálnou vstupní hodnotu.

Vyžadujeme tedy podmínky:

$$1 - \sin^2 4x > 0$$

$$\sin^2 4x < 1$$

Výraz na levé straně přitom dosahuje hodnoty 1 jen ve specifickém případě $\sin 4x = \pm 1$. Tyto případy zařadíme do podmínky:

$\begin{aligned}\sin 4x &= 1 \\ 4x &= n \\ \sin n &= 1 \\ n &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 4x &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x &= \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbf{Z}\end{aligned}$	$\begin{aligned}\sin 4x &= -1 \\ 4x &= n \\ \sin n &= -1 \\ n &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ 4x &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x &= \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbf{Z}\end{aligned}$
--	---

Shrnutí:

$$x \neq \frac{k\pi}{4} \wedge x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbf{Z}$$

Sudý počet osmin π určuje první podmínka a lichý počet osmin π určují uvedené další dvě podmínky. Jedná se tak o všechny možné celočíselné osminy π .

15 A

Zadání úlohy 16

2 body

16 Je dána rovnice s neznámou x a parametrem $p \in \mathbf{R}$:

$$\frac{2p}{x} - \frac{p+2}{x-1} = 0$$

Který zápis popisuje množinu K všech řešení dané rovnice v oboru $\mathbf{R}$?

A) $K = \left\{ \frac{2p}{p-2} \right\}$ pro $p \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $K = \emptyset$ pro $p \in \{2\}$

B) $K = \left\{ \frac{2p}{p-2} \right\}$ pro $p \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$, $K = \emptyset$ pro $p \in \{-2; 0; 2\}$

C) $K = \left\{ \frac{2p}{p+2} \right\}$ pro $p \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $K = \emptyset$ pro $p \in \{2\}$

D) $K = \left\{ \frac{2p}{p+2} \right\}$ pro $p \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$, $K = \emptyset$ pro $p \in \{-2; 0; 2\}$

E) $K = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{3}{2} \right\}$ pro $p \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $K = \emptyset$ pro $p \in \{0\}$

Řešení úlohy 16

16)

$$\frac{2p}{x} - \frac{p+2}{x-1} = 0 \quad / \cdot x \cdot (x-1)$$

$$2p \cdot (x-1) - x \cdot (p+2) = 0$$

$$2px - 2p - px - 2x = 0$$

$$x \cdot (2p - p - 2) = 2p$$

$$x \cdot (p - 2) = 2p$$

$$x = \frac{2p}{p-2}$$

Z úvodního tvaru, platí, že $x \neq 0$ a $x \neq 1$

$$0 = \frac{2p}{p-2} \rightarrow p = 0$$

$$1 = \frac{2p}{p-2} \rightarrow 2p = p - 2 \rightarrow p = -2$$

Vyřadíme tedy případy $p = 0$ a $p = -2$

Z finálního tvaru přidáme podmínku $p \neq 2$.

Výsledek:

$$x = \frac{2p}{p-2} \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2, 2\}$$

Zadání úlohy 17

2 body

17 Každý z následujících výrazů je definován pro všechna $x \in (-\infty; 0)$.

Který z výrazů se nerovná žádnému ze zbývajících výrazů?

A) $-\frac{|x|^2}{x} + |x|$

B) $\frac{(-x)^2}{x} + 3 \cdot |x|$

C) $-4 \cdot \sqrt{x^2} + 2 \cdot |x|$

D) $-\frac{x^2}{|x|} - 3x$

E) $x \cdot \sqrt{x^2} - 2x + x^2$

Řešení úlohy 17

17)

Každý z výrazů zjednodušíme. Pro záporná x platí:

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x$$

$$A: -\frac{|x|^2}{x} + |x| = -\frac{(-x)^2}{x} - x = -\frac{x^2}{x} - x = -x - x = -2x$$

$$B: \frac{(-x)^2}{x} + 3 \cdot |x| = \frac{x^2}{x} + 3 \cdot (-x) = x - 3x = -2x$$

$$C: -4 \cdot \sqrt{x^2} + 2 \cdot |x| = -4|x| + 2|x| = -2|x| = -2 \cdot (-x) = 2x$$

$$D: -\frac{x^2}{|x|} - 3x = -\frac{x^2}{-x} - 3x = x - 3x = -2x$$

$$E: x \cdot \sqrt{x^2} - 2x + x^2 = x \cdot |x| - 2x + x^2 = x \cdot (-x) - 2x + x^2 = -2x$$

Liší se výsledek třetího příkladu:

17 C

Zadání úlohy 18

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 18

Do lyžařské školičky přišlo 9 malých dětí. Každý ze tří instruktorů vložil 3 lístky se svým jménem do pytlíku, z něhož si každé dítě vylosuje svého instruktora.

(CZVV)

2 body

18 Kolika způsoby mohou být děti uvedeným postupem přiřazeny třem instruktorům?

- A) 2 160 způsoby
- B) 1 680 způsoby
- C) 1 512 způsoby
- D) 729 způsoby
- E) 625 způsoby

Řešení úlohy 18

18)

Jedná se o počet všech možných pořadí 9 prvků s tím, že se jedná o tři trojice stejných prvků. Počítáme tedy permutaci s opakováním.

$$P'(3,3,3) = \frac{(3+3+3)!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{9!}{6^3} = 1\,680$$

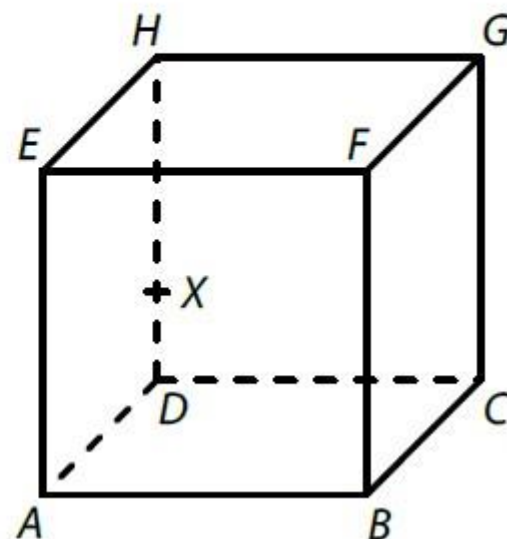
18 B

Zadání úlohy 19

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Je dána krychle $ABCDEFGH$ a bod X , který je vnitřním bodem hrany DH .

Řez krychle rovinou ρ , která prochází bodem X , vrcholem G a ještě jedním vrcholem krychle, má tvar trojúhelníku.



(CZVV)

2 body

19 Který z následujících vrcholů krychle leží v rovině ρ ?

- A) vrchol A
- B) vrchol B
- C) vrchol C
- D) vrchol D
- E) vrchol E

Řešení úlohy 19

19)

Můžeme vyloučit body ve společné stěně s body X a G – tedy body D, C, H . Aby vzniknul trojúhelník, nesmí být hledaný bod s bodem X , ani s bodem G ve společné stěně. Leží-li bod A v této rovině, pak vznikne čtyřúhelník – tento bod také vyřadíme. Je-li bod B součástí roviny, pak pracujeme s rovnoběžkami, tedy trojúhelník nevznikne a kdyby se jednalo o bod F , pak řez vzniká rovnoběžně s hranou FG směrem k bodu X a vzniká tak opět čtyřúhelník. Zbývá tak pouze bod E . Při tvorbě řezu bychom totiž pouze vytvořili úsečky EG, EX, XG .

19 E

Zadání úlohy 20

2 body

- 20** Délky hran kváдру vycházejících z téhož vrcholu jsou v poměru $1 : \sqrt{2} : 2$.
Obsah stěny s nejkratší stěnovou úhlopříčkou je $S = 2 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}^2$.

Jaký je objem kváдру?

- A) 4 cm^3
- B) $4 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}^3$
- C) 8 cm^3
- D) $8 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}^3$
- E) 16 cm^3

Řešení úlohy 20

20)

$$a : b : c = 1 : \sqrt{2} : 2$$

Stejně tak můžeme zapsat:

$$a = k; \quad b = \sqrt{2} \cdot k; \quad c = 2k; \quad k \in \mathbf{Z}$$

Nejkratší stěnová úhlopříčka vznikne pomocí kombinace dvou nejkratších stran. Zapišeme tedy obsah takové stěny:

$$a \cdot b = k \cdot \sqrt{2} \cdot k$$

Tento výraz dáme do rovnosti s uvedeným obsahem a vyřešíme rovnici:

$$k \cdot \sqrt{2} \cdot k = 2 \cdot \sqrt{2} \quad / : \sqrt{2}$$

$$k^2 = 2$$

$$k = \pm \sqrt{2}$$

Vzhledem k tomu, že k musí být kladné, pak je $k = \sqrt{2}$.

Určíme objem:

$$V = a \cdot b \cdot c = k \cdot \sqrt{2} \cdot k \cdot 2k = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 8 \text{ cm}^3$$

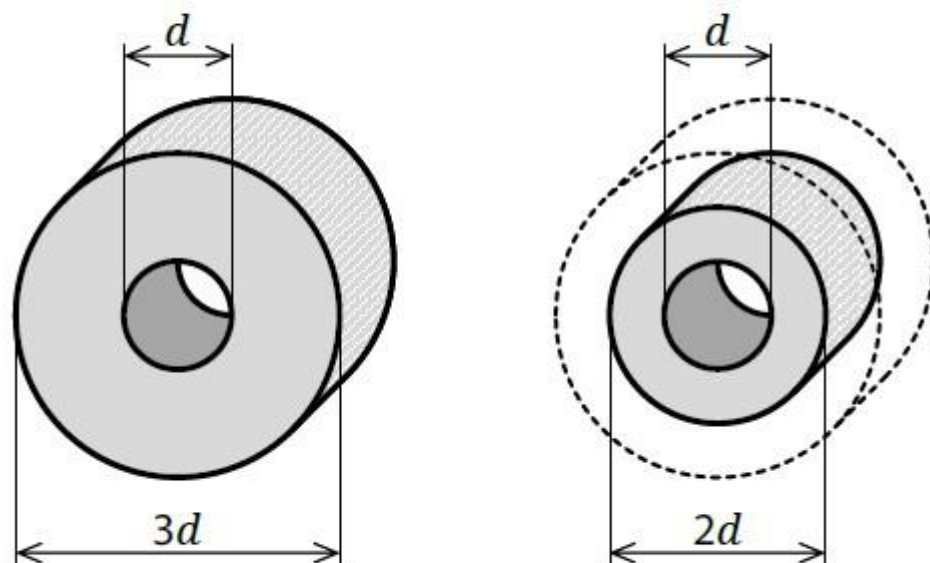
20 C

Zadání úlohy 21

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Navinutý toaletní papír má tvar dutého rotačního válce, jehož podstavou je mezikruží s vnitřním průměrem d a vnějším průměrem $3d$.

Odvinutím části toaletního papíru se vnější průměr podstavy dutého válce zmenšil na $2d$.



Délka navinutého toaletního papíru je přímo úměrná objemu dutého válce.

(CZVM)

2 body

21 Jaká část celkové délky toaletního papíru byla odvinuta?

- A) $\frac{1}{2}$
- B) $\frac{9}{16}$
- C) $\frac{7}{12}$
- D) $\frac{5}{8}$
- E) $\frac{3}{4}$

Řešení úlohy 21

21)

Vyjádříme objem původního válce, kde podstavou je mezikružší (rozdíl obsahů kruhů):

$$V_1 = S_p \cdot v = (\pi \cdot (1,5d)^2 - \pi \cdot (0,5d)^2) \cdot v = (2,25\pi d^2 - 0,25\pi d^2) \cdot v = 2\pi d^2 v$$

Podobně vyjádříme objem odvinutého válce:

$$V_2 = S_p \cdot v = (\pi \cdot d^2 - \pi \cdot (0,5d)^2) \cdot v = (\pi d^2 - 0,25\pi d^2) \cdot v = 0,75\pi d^2 v$$

Odvinut byl jejich rozdíl:

$$2\pi d^2 v - 0,75\pi d^2 v = 1,25\pi d^2 v$$

Spočítáme o jakou část se jedná:

$$\frac{1,25\pi d^2 v}{2\pi d^2 v} = \frac{1,25}{2} \cdot \frac{4}{4} = \frac{5}{8}$$

21 D

Zadání úlohy 22

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

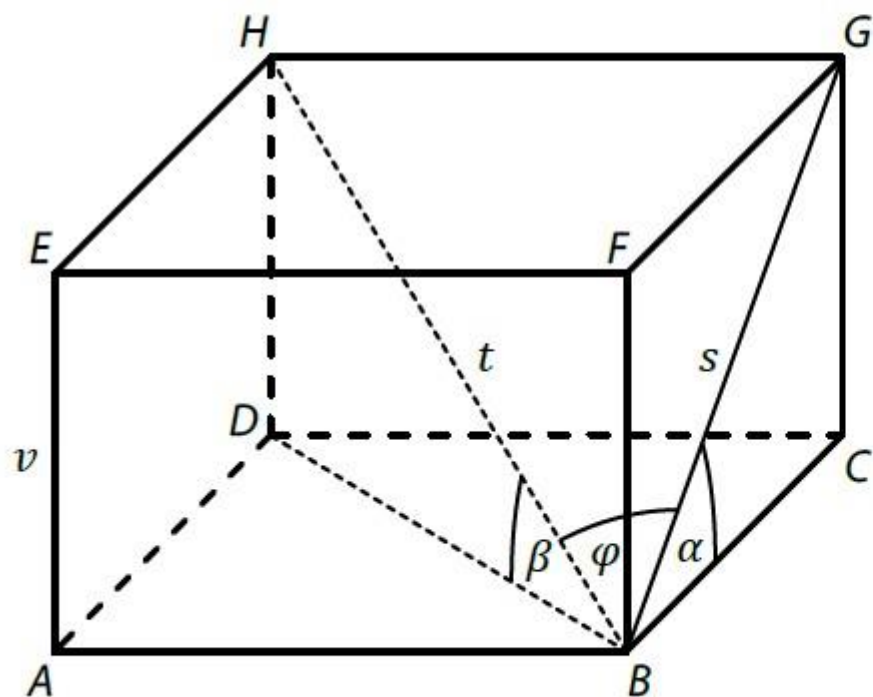
V libovolném kvádru $ABCDEFGH$ vyznačíme následující veličiny:

v je délka hrany AE , s je délka stěnové úhlopříčky BG , t je délka tělesové úhlopříčky BH ,

α je odchylka stěnové úhlopříčky BG od roviny podstavy $ABCD$,

β je odchylka tělesové úhlopříčky BH od roviny podstavy $ABCD$,

φ je odchylka tělesové úhlopříčky BH a stěnové úhlopříčky BG .



max. 3 body

22 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (22.1–22.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

A N

22.1 V každém kváдру $ABCDEFGH$ platí $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{s}{t}$.

☐ ☐

22.2 V každém kváдру $ABCDEFGH$ platí $\sin \varphi = \frac{s}{t}$.

☐ ☐

22.3 Existuje kvádr $ABCDEFGH$, v němž platí $\beta = \alpha$.

☐ ☐

Řešení úlohy 22

22)

22.1)

Obdélník $DBFH$, který se nachází uvnitř kvádru má úhlopříčku t , která svírá se stranou DB úhel β . Pro délku strany DH , odvodíme:

$$\sin \beta = \frac{|DH|}{t} \rightarrow |DH| = t \cdot \sin \beta$$

Dále v pravé stěně kvádru odvodíme:

$$\sin \alpha = \frac{|CG|}{s} \rightarrow |CG| = s \cdot \sin \alpha$$

Protože platí, $|CG| = |DH|$, pak se musejí rovnat i jejich vyjádření výše:

$$t \cdot \sin \beta = s \cdot \sin \alpha \quad /: \sin \alpha$$

$$\frac{t \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = s \quad /: t$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{s}{t}$$

22.1 A

22.2)

Úsečka BG je kolmá na úsečku HG . Trojúhelník BGH je tedy pravoúhlý s pravým úhlem v bodě G . Úsečky t a s jsou tedy přeponou a přilehlou odvěsnou. Jedná se tedy o kosinus:

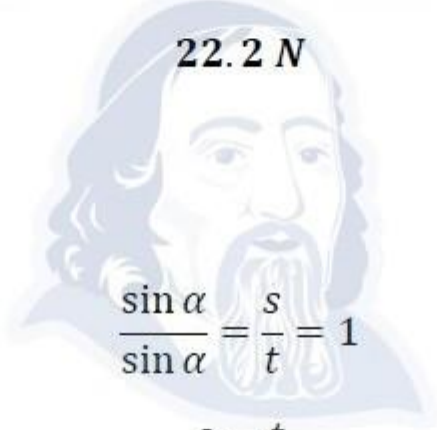
$$\cos \varphi = \frac{s}{t}$$

Hodnoty $\sin \varphi$ a $\cos \varphi$ se rovnají pouze ve specifických případech, tedy ne ve všech kvádrech.

22.2 N

22.3)

Platí-li $\beta = \alpha$, pak můžeme odvodit:


$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{s}{t} = 1$$
$$s = t$$

V takovém kvádru by muselo platit, že jeho tělesová úhlopříčka je stejně dlouhá jako stěnová. Tyto dvě úhlopříčky společně s hranou kvádru ale vždy uzavírají pravoúhlý trojúhelník, kde přeponou je právě tělesová úhlopříčka a přepona je vždy nejdelší stranou pravoúhlého trojúhelníku.

Takový kvádr neexistuje.

22.3 N